

1) Rappel

- La norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est le nombre réel positif $\|\vec{u}\| = AB$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, alors: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$
- Si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$
- Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé carré scalaire de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et k un nombre réel. On a :
 - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
 - $(\vec{u} \pm \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Dans tout le reste, on considère que le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soient $\vec{u}(a; b; c)$; $\vec{v}(a'; b'; c')$ et $\vec{w}(a''; b''; c'')$ deux vecteurs exprimés dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = a^2 + b^2 + c^2 = \|\vec{u}\|^2$ donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}$.
- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ et $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Le système : $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} / t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite $D(A; \vec{u})$.

2) Plan et vecteur normal.

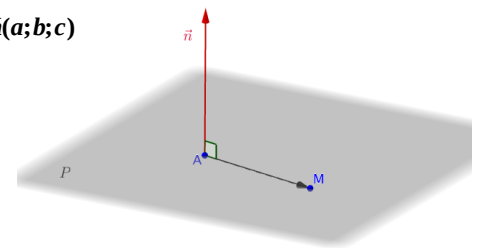
a) Vecteur normal à un plan.

Définition : Soit (D) une droite perpendiculaire à un plan (P) , tout vecteur non nul directeur de (D) est appelé vecteur **normal** à (P) .

b) Equation d'une droite définie par un point A et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$

Théorème : Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est la droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par A .



- Théorème** : soit $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur non nul avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. et d un nombre réel.
- Une droite admettant $\vec{n}(a; b; c)$ comme vecteur normal a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Réciproquement** : tout plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ admet $\vec{n}(a; b; c)$ comme vecteur normal.

Remarque :

- Deux plans dites orthogonaux si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
- Deux plans dites parallèles si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

c) Distance d'un point à un plan.

Propriété : Considérons un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et un plan $(P) : ax + by + cz + d = 0$

La distance du point A au plan (P) est: $d(A, (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

3) Sphère.

a) Equation cartésienne d'une sphère définie par son centre et son rayon.

Sachant que l'ensemble des points $M(x; y; z)$ qui vérifient $\Omega M = R$ (avec $R > 0$) est une sphère de centre Ω et de rayon R . alors on en déduit la propriété suivante

Propriété : Le cercle de centre $\Omega(a; b; c)$ et de rayon R a pour équation : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

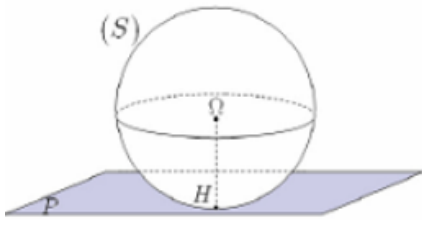
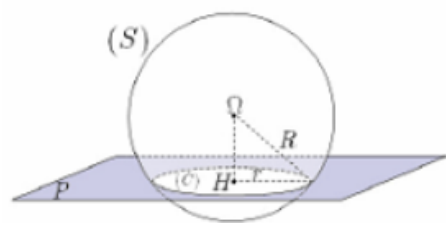
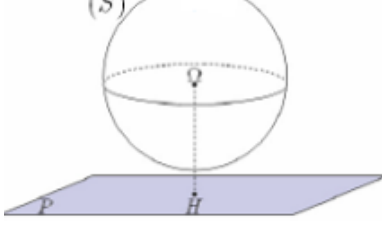
b) Equation cartésienne d'une sphère défini par son diamètre.

Propriété : Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Remarque : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) = 0$

4) Positions Relatives d'un plan et d'une sphère.

Pour étudier la position relative d'un plan (P) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R . Il suffit de comparer $d(\Omega, (P))$ au rayon R .

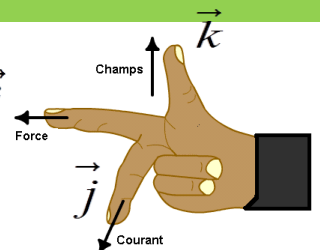
$d(\Omega, (P)) = R$	$d(\Omega, (P)) < R$	$d(\Omega, (P)) > R$
Le plan (P) et la sphère (S) ont un seul point commun H , le projeté de Ω sur (P) . On dit que le plan (P) est tangent à la sphère (S) .	Le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre H , le projeté de Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2}$	Le plan ne coupe pas la sphère
		

5) Produit vectoriel.

a) Orientation de l'espace.

L'espace doit être **orienté** en adoptant le même point de vue qu'en sciences physiques, on peut notamment utiliser la règle des **trois doigts de la main droite** ou le « **bonhomme d'ampère** » :

On dit alors que le repère est de **sens direct**.



b) Notation et définition.

Le **produit vectoriel** de deux vecteurs **non nuls** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :

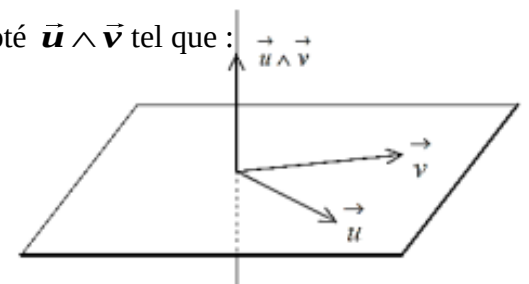
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$;

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors :

1) **Direction** : Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

2) **Le sens** de $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est tel que la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit de sens direct.

3) **Norme** : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\overrightarrow{u;v})|$.



Remarque : Le produit **vectoriel** est un **vecteur**, alors que le produit **scalaire** est un **nombre**.

c) **Propriétés** : Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout nombre réel a ,

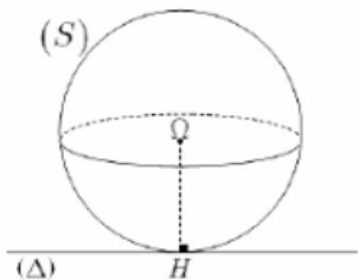
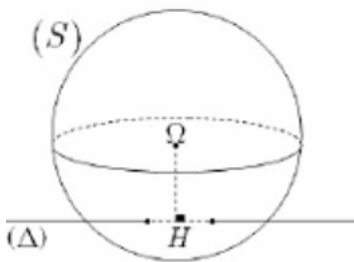
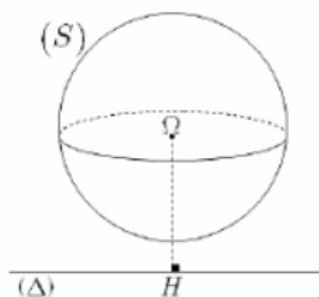
$$\bullet (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \quad \bullet \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \quad \bullet a(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (a\vec{v}) = (a\vec{u}) \wedge \vec{v} \quad \bullet \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$\bullet \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\bullet \text{ Soient la droite } D(A; \vec{u}) \text{ et le point } M, \text{ alors } d(M; (D)) = \frac{\|\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\vec{u}\|}$$

d) Positions relatives d'une droite et d'une sphère.

Pour étudier la position relative d'une droite (D) et d'une sphère (S) de centre Ω et de rayon R . Il suffit de comparer $d(\Omega, (D))$ au rayon R .

$d(\Omega, (D)) = R$	$d(\Omega, (D)) < R$	$d(\Omega, (D)) > R$
La droite (D) est tangente à la sphère (S) .	La droite (D) coupe la sphère (S) en deux points différents.	La droite (D) ne coupe pas la sphère (S)
		

Propriété : L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$