Résumé de Cours : LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

PROF : ATMANI NAJIB **2ème BAC Sciences ex (pc-svt…)**

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

A) RAPPELLE

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle :
(E): $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions :
$y = \alpha cos\omega x + \beta\ sin\omega x$ où α et β sont des réels.

B) EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Définition : Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Remarque : Pour simplifier l'écriture d'une équation différentielle on note l'inconnu (qui est une fonction) y au lieu de $y(x)$.

1) L'équation $y' = ay$ ou $a \in \mathbb{R}^*$

a) Soit a un réel non nul.
(E) $y' = ay$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$
La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions : $x \to y(x) = \lambda e^{ax}$ Où λ est un réel.

2) L'équation y'=ay+b ou $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Soit a un réel non nul et b un réel
(E) $y' = ay + b$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ .La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions : $x \to y(x) = \lambda e^{x} - \dfrac{b}{a}$
où λ est un réel.

Remarque : Le réel λ dans la solution générale de l'équation différentielle (E) peut-être déterminé par les conditions initiales

C) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES : $ay'' + by' + cy = 0$

Soit a un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.

1) Considérons l'équation différentielle :
(E): $ay'' + by' + cy = 0$
L'équation (1): $ar^2 + br + c = 0$ à variable réelle r s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E).

2) L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est dite à coefficients constants si a, b et c sont des réels donnés.
On Supposera $a \neq 0$

a) Linéarité :
L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ possède la propriété suivante
Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est aussi une solution.
A cause de cette propriété, on dit que l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$ est linéaire.

b) Résolution de (E): $ay'' + by' + cy = 0$
Soit l'équation différentielle :(E) $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$ et soit (E_1): $ar^2 + br + c = 0$ son équation Caractéristique.
$\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E_1)

1) Si $\Delta > 0$ l'équation (E_1) a deux racines : r_1 et r_2 réelles et distinctes et les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
où A et B réels

2) Si $\Delta < 0$ l'équation (E_1) a deux racines z_1 et z_2 complexes conjugués et si : $z_1 = p + qi$ alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions
$y(x) = e^{px}\left(A\cos qx + B\sin qx\right)$ où A et B réels

3) Si $\Delta = 0$ l'équation (E_1) admet une racine double r et les solutions de (E) sont les fonctions:
$y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ Où A et B sont des réels.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement
Aux calculs et exercices Que l'on devient
Un mathématicien