CALCULS INTEGRALES

Exercices d'applications et de réflexions

PROF : ATMANI NAJIB **2BAC sciences expérimentales (pc et svt.)**

TD : CALCULS INTEGRALES

Exercice1 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_2^4 3x\,dx$ **2)** $J=\int_0^1(2x+3)\,dx$

3) $K=\int_e^{e^2}\frac{1}{t}dt$ 4) $L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\theta)d\theta$

Exercice2 : Calculer les intégrales suivantes :

1) $I_1=\int_0^2(2x-1)\,dx$ 2) $I_2=\int_{-1}^1\left(x^4-4x^3+2\right)dx$

3) $I_3=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$ 4) $I_4=\int_0^{\ln 2}e^{2t}dt$

5) $I_5=\int_0^{\sqrt{\ln 2}}te^{-t^2}dt$ 6) $I_6=\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$

7) $I_7=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}dx$ 8) $I_8=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}dx$

9) $I_9=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx$ 10) $I_{10}=\int_2^3\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$

11) $I_{11}=\int_0^1\sqrt{2x+1}dx$ 12) $I_{12}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin^3 x\,dx$

13 $I_{13}=\int_1^2\frac{3}{(3x-4)^5}dx$ 14) $I_{14}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\cos 3x)\,dx$

15) $I_{15}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ 16) $I_{16}=\int_0^1\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x+1}\right)dx$

17) $I_{17}=\int_1^e\frac{\ln^3 x}{x}dx$ 18) $I_{18}=\int_0^1(x-1)e^{(x-1)^2}dx$

19) $I_{19}=\int_1^2\frac{1}{x(1+\ln x)}dx$ 20) $I_{20}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^2\,dx$

21) $I_{21}=\int_1^e\frac{8x^9-4x+2}{x}dx$

Exercice3: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_0^3|x-1|dx$ 2) $J=\int_{-2}^0|x(x+1)|dx$

Exercice4: on pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Exercice5 :

on pose : $I=\int_0^{\ln 16}\frac{e^x+3}{e^x+4}dx$ et $J=\int_0^{\ln 16}\frac{1}{e^x+4}dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-3J$

2)en déduire I et J

Exercice6: Calculer les intégrales suivantes :

1) $I=\int_1^3\frac{|x-2|}{\left(x^2-4x\right)^2}dx$ 2) $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

3) $I=\int_0^2\left|x^2-x-2\right|dx$

Exercice7: on pose :

$A=\int_1^e\left(\frac{1}{t}+\ln t\right)dt$ et $B=\int_1^e\left(1+\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$

Calculer $A+B$

Exercice8: on pose : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\times\cos 2x\,dx$ et

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\times\cos 2x\,dx$

1)Calculer $I+J$ et $I-J$

2)en déduire I et J

Exercice9 : on pose : $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx$ et

$L=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

1)Calculer $K+L$ et $K-L$

2)en déduire K et L

Exercice10 : 1)verifier que :

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}\quad \frac{t^2}{1+t}=t-1+\frac{1}{1+t}$

2) Calculer l' intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$

Exercice11 : 1)verifier que :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1;1\}$ $\quad \frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$

2) Calculer l' intégrale suivante : $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$

Exercice12 :

Calculer l' intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$

Exercice13 :

1) determiner les réels a et b tels que :

$\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$

2)en déduire l' intégrale suivante : $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

Exercice14 : Calculer l' intégrale suivante :

$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2-4} dx$

Exercice15 :on pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1)montrer que : $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (linéarisation de $\cos^4 x$)

2)en déduire l' intégrale I

Exercice16 : Montrer les inégalités suivantes

1) $\int_1^e \ln x dx \geq 0$ $\qquad$ 2) $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$

Exercice17 : Montrer que : $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

Exercice18 :d'application Soit f : $x \to e^{-x^2}$

Définie sur R.

Pour tout réel $a \geq 1$, on s'intéresse à l'intégrale

$F(a) = \int_1^a f(x) dx$

1)Démontrer que pour tout réel $x \geq 1$:

$0 \leq f(x) \leq e^{-x}$.

2) En déduire que pour tout réel $a \geq 1$:

$0 \leq F(a) \leq e^{-1}$.

Exercice19 :soit la suite numérique (u_n)définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que (u_n)est croissante

2) Montrer que : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 20:soit la suite numérique (u_n)

définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1)Montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \in [0;1]$: $\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{nx}}{2}$

2) En déduire: $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{e^n}\right)$

Exercice 21: on considére la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Déterminer La valeur moyenne de f sur $[0;\ln 2]$

Exercice 22: Calculer les intégrales suivantes :

1) $B = \int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$ $\qquad$ 2) $C = \int_0^1 2x\sqrt{x^2+1} dx$

Exercice 23 : Calculer l' intégrale suivante :

1) $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$ 2) $J = \int_0^{\ln 2} xe^x dx$ 3) $K = \int_1^e \ln x dx$

Exercice24 : En utilisant une intégration par partie calculer :1) $I = \int_0^1 xe^{2x} dx$ $\qquad$ 2)

$J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

3) $K = \int_0^1 x\sqrt{e^x} dx$ 3) $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

4) $M = \int_1^e (x \ln x) dx$ 5) $N = \int_1^e \cos(\ln x) dx$

Exercice25 : En utilisant une intégration par partie calculer :

$J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$ $\qquad K = \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x}) dx$

$M=\int_1^e x(1-\ln x)\,dx$ $\quad N=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

$R=\int_1^e x\ln x\,dx$ $\quad Q=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx$

Exercice26 : On pose : $I_0=\int_0^1\sqrt{x+3}\,dx$

$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,dx$

1- a) Calculer I_0

b) Calculer I_1 en utilisant une I.P.P

2- Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.

3- a) En utilisant un encadrement adéquat,

montrer que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1}\le I_n\le\frac{2}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_n$

Exercice 27: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=1cm$

Soit f définie sur $[1;3]$ par : $f(x)=2x+1$

1)verifier que f est continue et positif sur $[1;3]$

2)tracer Cf la courbe représentative de la fonction f sur $[1;3]$

3) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x=1$ et $x=3$

4)calculer l'intégrale : $I=\int_1^3 f(x)\,dx$

Que peut-on dire ?

Exercice 28: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\|=2cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x^2$

1)tracer C_f la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x=1$ et $x=2$

Exercice 29: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthogonale avec $\|\vec{i}\|=2cm$ et $\|\vec{j}\|=3cm$

Soit f définit par : $f(x)=x^2-2x$

1)tracer Cf la courbe représentative de f

2) calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites : $x=1$ et $x=3$

Exercice30 :

$(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$

Soit f définit par : $f(x)=1-e^x$

Calculer S la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x=\ln 2$ et $x=\ln 4$

Exercice 31: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\|=2cm$ et Soit f définit par : $f(x)=e^x-3$

Calculer A la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x=\ln 3$ et $x=\ln 6$

Exercice 32: $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\|=2cm$ et Soit f définit par : $f(x)=\ln x-1$

Calculer A la surface du domaine limité par : Cf, l'axe des abscisses et les droites :

$x=1$ et $x=e$

Exercice 33: $(o;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé avec $\|\vec{i}\|=2cm$

Soit f et g deux fonctions tels que:

$f(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}+e^{-x}$ et $g(x)=e^{-x}$

calculer en cm^2 S la surface du domaine limité par

(C_f) ; (C_g) et les droites $x=0$ et $x=\ln 2$

Exercice34 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\|=0.5cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x^2-8x+12$

et (D) la tangente à la courbe (C_f) au point

$A(3;f(3))$

Calculer A la surface du domaine limité par :

(C_f) et les droites : (D) et $x=1$ et $x=e$

Exercice35 : $(o;\vec{i};\vec{j})$ repère orthonormé avec

$\|\vec{i}\|=1cm$ et Soit f définit par : $f(x)=x-1+\frac{\ln x}{x}$

Calculer A la surface du domaine limité par :

C_f et les droites : $y=x-1$ et $x=1$ et $x=e$

Exercice36 : $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ repère orthonormé

Soit f et g deux fonctions tels que: $f\left(x\right)=e^{\sqrt{x}}$ et $g\left(x\right)=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ Calculer A la surface du domaine limité par : $\left(C_f\right)$; $\left(C_g\right)$ et les droites $x=0$ et $x=1$

Exercice37 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f\left(x\right)=\frac{xe^x+x+1}{e^x+1}$$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f et vérifier qu'elle est strictement croissante.
2) Déterminer la surface S_1 du domaine limité par l'axe (Ox) ; la courbe C_f et les droites:
$x = 0$ et $x = 1$.
3) Déterminer la surface S_2 du domaine limité par la droite (Δ) $y = x$; la courbe C_f et les droites:
$x = 0$ et $x = 1$.

Exercice38 : $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f\left(x\right)=\sqrt{x}$

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses entre $a = 0$ et $b = 4$

Exercice39 : $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = \frac{2}{3}cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f\left(x\right)=\sqrt{x\left(e^x-1\right)}$ et $\left(C\right)$ la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $\left[0;1\right]$

Exercice40: $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé avec $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right)=\sqrt{\ln x}$

et $\left(C\right)$ la courbe de f

Déterminer en cm^3 le volume du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses dans l'intervalle $\left[1;e\right]$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien