Benmoussa Mohammed

Définition

f est une fonction continue sur $[ab]$ tel que F est une fonction primitive de f sur $[ab]$ c.à.d. $F'=f$

Le nombre $F(b)-F(a)$ est appelé intégral de f de a à b on note :

$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$ on lit intégral de a à b de $f(x)dx$.

Propriétés (le programme considère seulement les fonctions continues)

Linéarité

$\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ | $\int_a^b \alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$; $\alpha\in\mathbb{R}$

Relation de Chasles - f est continue

$\int_a^a f(x)dx=0$ | $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$ à condition $c\in[ab]$

f est dérivable sur $[ab]$ et f' continue sur $[ab]$ on a : $\int_a^b f'(x)dx=[f(x)]_a^b=f(b)-f(a)$

$\int_a^b cdx=[cx]_a^b=c(b-a)$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Intégral et l'ordre

- $\forall x\in[ab]$, $f(x)\geq 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\geq 0$; (à condition que $a\leq b$) .
- $\forall x\in[ab]$, $f(x)\leq 0\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\leq 0$; (à condition que $a\leq b$) .
- $\forall x\in[a,b]$; $f(x)\leq g(x)\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx$. avec $a\leq b$.
- $\forall x\in[a,b]$: $m\leq f(x)\leq M\Rightarrow(b-a)m\leq\int_a^b f(x)dx\leq(b-a)M$
- D'où : $m\leq\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx\leq M\,(a\neq b)$.

La valeur moyenne

- Il existe au moins un $c\in[ab]$ avec $a<b$ tel que $(b-a)\times f(c)=\int_a^b f(x)dx$.
- Le nombre $f(c)=\frac{1}{b-a}\times\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[ab]$

intégration par parties

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[ab]$ leurs dérivées u' et v' sont continues sur $[ab]$ on a

$$\underbrace{\int_a^b u(x)\times v'(x)dx}_{(1)}=\underbrace{[u(x)\times v(x)]_a^b}_{(2)}-\underbrace{\int_a^b u'(x)\times v(x)dx}_{(3)}$$

méthode ou bien disposition

$u(x)=\cdots$ $u'(x)=\cdots$

$(1)\downarrow$ $(2)\searrow$ - $\downarrow(3)$

$v'(x)=\cdots$ $v(x)=\cdots$

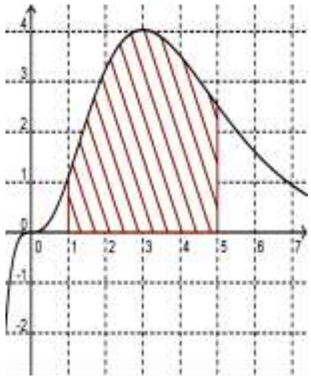
Applications sur les intégrales calculs des surfaces

- Le plan (P) est rapporté à un repère orthogonal $(0,\vec{i},\vec{j})$. on pose $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et le point K tel que OIKJ est parallélogramme . On considère la surface du parallélogramme OIKJ comme unité d'aire (du la surface) cette aire on la note 1 u.a
- f est une fonction continue sur $[ab]$ et (C_f) la courbe de f .
- (F) est la partie du plan (P) compris entre la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ .On désigne par A la surface de la partie (F) du plan (P) .
- Remarque : la surface A se calcule par l'intégral $\int_a^b f(x)dx$ et dépend du signe de $f(x)$

Propriété : La surface de (F) est $A=\int_a^b |f(x)|dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ (u.a)

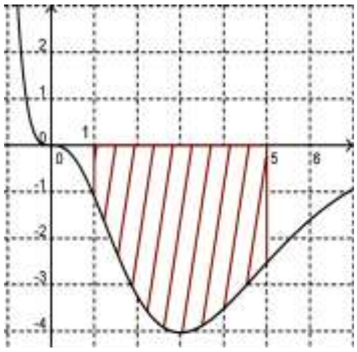
Les cas possibles

La fonction f est positive sur $[ab]$.
(c'est-à-dire (C_f) au dessus de l'axe des abscisses



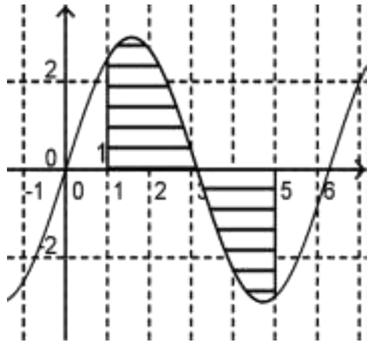
La surface est :
$A=\int_a^b f(x)dx \times \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$ u.a

La fonction f est négative sur $[ab]$.
(c'est-à-dire (C_f) au dessous de l'axe des abscisses



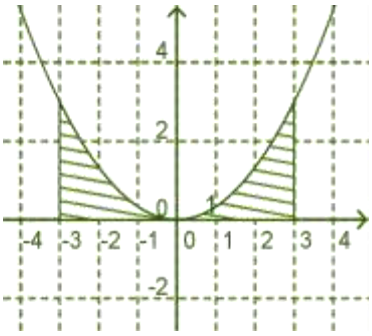
La surface est :
$A=-\int_a^b f(x)dx \times \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$ u.a

La fonction f est change de signe sur $[ab]$. (c'est-à-dire (C_f) au dessous et au dessus de l'axe des abscisses



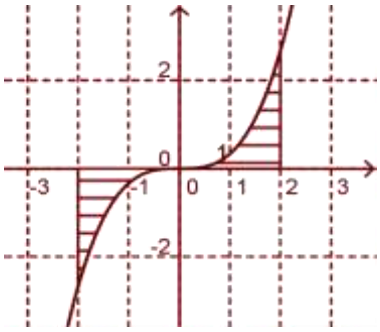
La surface est :
$A=\int_a^b |f(x)|dx \times \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$ u.a
$=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx$ (u.a)

f est une fonction paire sur $[-a,a]$ est positive sur $[0,a]$.



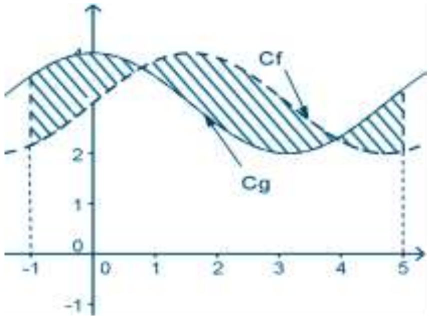
On a:
$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ u.a
Remarque :
$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$

f est une fonction impaire sur $[-a,a]$ et positive sur $[0,a]$



On a :
$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ u.a
Remarque : $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$
$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx$

domaine du plan comprise entre les deux courbes (C_f) et (C_g)



On considère $\mathcal{A}$ La surface du domaine du plan comprise entre les deux courbes (C_f) et (C_g) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$. La surface est :
$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \times \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|$ u.a

L'espace est muni d'un repère orthogonal $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (C_f) la courbe d'une fonction continue sur $[ab]$ avec $(a<b)$. on suppose que (C_f) tourne au tour de l'axe des abscisse de 360° le solide de révolution obtenu à pour volume :
$V=\int_a^b \pi(f(x))^2 dx \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ (unité de volume)