

## **Intégration d'une fonction continue sur un segment :**

### **Définition :**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ,  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ ,  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ . Le nombre réel  $F(b) - F(a)$  est appelé l'intégrale de  $a$  à  $b$  de la fonction  $f$  et se note :  $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ .

### **Remarque :**

Dans l'écriture  $\int_a^b f(x)dx$ , On peut remplacer la variable  $x$  par n'importe quelle autre.

(On dit que  $x$  est une variable muette), c'est-à-dire :  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta = \dots$

### **Propriété :**

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad ; \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

## **Relation de chasles – linéarité de l'intégrale :**

### **Relation de chasles :**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a,c]$ , et  $b \in [a,c]$ .

$$\text{On a : } \int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

### **Linéarité :**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a,b]$ , et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\text{On a : } \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{Et} \quad \int_a^b \alpha \times f(x)dx = \alpha \times \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [\alpha.f(x) + \beta.g(x)]dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)dx.$$

## **Intégration par Parties :**

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$  telles que  $u'$  et  $v'$  sont continues sur un intervalle  $I$ . Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ .

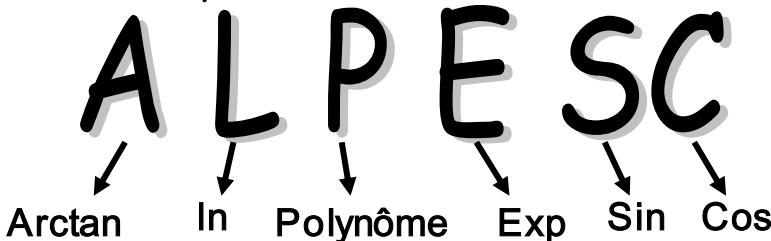
$$\text{On a : } \int_a^b u'(x) \times v(x)dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \times v'(x)dx.$$

Cette formule est appelée formule de l'intégration par parties.

### **Exemple :**

En utilisant une intégration par parties : Calculer  $I = \int_1^e x \times \ln(x)dx$ .

Pour déterminer la fonction primitive et la fonction dérivée en utilise la méthode suivante :



La première fonction dans ALPESC est une fonction primitive et la deuxième est une fonction dérivé.

Donc : On pose :  $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases}$  donc :  $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

$U$  et  $v$  sont dérivable sur  $[1;e]$ , et  $u'$  et  $v'$  sont continues sur l'intervalle  $[1;e]$ , d'après la propriété de l'intégration par parties on a :

$$I = \int_1^e x \times \ln(x) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \times \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \times \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$I = \left[ \frac{1}{2}x^2 \times \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}x^2 \right]_1^e = \left[ \frac{1}{2}x^2 \times \ln x - \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e = \left( \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4} \right) - \left( \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Donc :  $I = \frac{e^2 + 1}{4}$ .

## ↳ Valeur moyenne :

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$  tels que  $a < b$ .

☞ Le nombre réel  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  est appelé la valeur moyenne de  $f$  sur  $[a,b]$ .

☞ Il existe un réel  $c$  appartenant à  $[a,b]$  tel que :  $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

## ↳ Calcul d'aires :

### ☞ Propriété 1 :

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle  $[a,b]$ . Soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

☞ L'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\mathcal{C}_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations :  $x=a$  et  $x=b$ . Est le nombre réel  $S = \left( \int_a^b |f(x)| dx \right) u.a$ .

### ☞ Propriété 2 :

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $[a,b]$ . Et  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  sont les courbes représentatives de  $f$  et  $g$  dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

☞ L'aire de la partie du plan délimitée par les courbes  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$ , et les droites d'équations :  $x=a$  et  $x=b$ . Est le nombre réel  $S = \left( \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) u.a$ .

## ↳ Calcul des volumes :

L'espace est rapporté à un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a,b]$ .

☞ Le volume de solide de révolution engendré par la rotation de la courbe  $(\mathcal{C}_f)$

autour de l'axe des abscisses : Est  $V = \left[ \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] u.v$ .

$u.a$  : est l'unité d'aire ( $u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ ) et  $u.v$  : est l'unité de volume ( $u.v = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$ ).