

Calcul intégral

EL KYAL MOHAMED

➤ Intégrale d'une fonction continue sur un segment :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$

L'intégrale de f de a à b est le nombre réel : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

➤ Propriétés :

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

Linéarité: $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

$$(k \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Relation de Chasles: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

➤ Valeur moyenne :

Soit f une fonction continue sur segment $[a; b]$

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

➤ Intégrale et ordre :

si $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

si $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$

➤ Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx$$

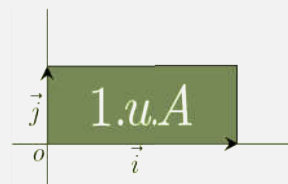
➤ Calcul d'aires :

Le plan est rapporté à un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j})

Soit I et J deux points tels que : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

L'unité d'aire, notée $u.A$, est l'aire du rectangle bâti à partir des points O , I et J

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



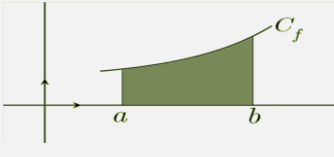
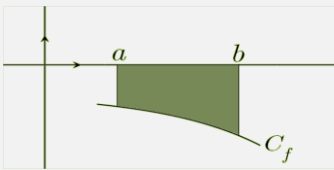
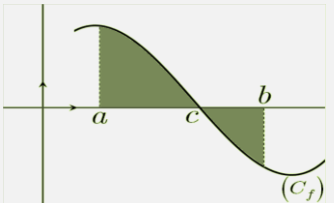
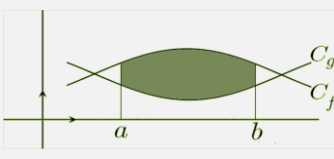
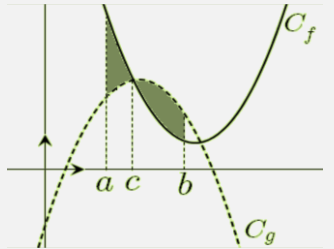
L'aire du domaine délimité par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est:

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) . u.A$$

L'aire du domaine délimité par C_f , C_g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est:

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) . u.A$$

➤ Cas particuliers :

| Figure illustrative | Remarque | L'aire du domaine hachuré sur la figure |
|---|--|--|
|  | f est positive sur $[a; b]$ | $\left(\int_a^b f(x) dx \right) . u.A$ |
|  | f est négative sur $[a; b]$ | $\left(\int_a^b -f(x) dx \right) . u.A$ |
|  | <ul style="list-style-type: none"> f est positive sur $[a; c]$ f est négative sur $[c; b]$ | $\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) . u.A$ |
|  | C_f est au dessus de C_g sur $[a; b]$ | $\left(\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) . u.A$ |
|  | <ul style="list-style-type: none"> C_f est au dessus de C_g sur $[a; c]$ C_g est au dessus de C_f sur $[c; b]$ | $\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) . u.A$ |

➤ Calcul de volumes :

Le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C_f sur $[a; b]$, un tour complet autour de l'axe des abscisses est:

$$V = \left[\int_a^b \pi f(x)^2 dx \right] . u.v$$

$u.v$: unité de volume

