

NOMBRES COMPLEXES

A) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE

NON NUL : 1) Soit θ un réel on pose : $\cos\theta + i \sin\theta = e^{i\theta}$

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$ Cette écriture s'appelle la

forme exponentielle

2) Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

a) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ b) $z^n = r^n e^{in\theta}$ c) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$

d) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$ e) $\bar{z} = re^{-i\theta}$ f) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

g) Pour tout réel θ on a : $(re^{i\theta})^n = (r)^n re^{in\theta}$

d'où : $(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

(Formule de Moivre)

h) Formule d'Euler : Pour tout réel θ on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \right)$$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

B) LES EQUATION DU SECOND DEGRE DANS \mathbb{C} :

1) Les équations de second degré

Soit dans \mathbb{C} l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) où a, b, c

sont des réels avec $a \neq 0$

soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

on a : Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet comme solution le complexe $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les

complexes $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ où δ une racine

carrées de Δ

Remarque : Si les coefficients a, b et c sont des réels et

$\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

C) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation : Soit \vec{u} un vecteur de \mathcal{V}_2 tel que :

$\text{aff}(\vec{u}) = a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ si et seulement si : $z' = z + a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur \vec{u} tel que $\text{aff}(\vec{u}) = a$

2) L'homothétie : l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k , admet une écriture complexe de la forme : $z' = kz + \omega(1 - k)$

3) La rotation : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ , admet une écriture complexe de la forme :

$$z' = (z - \omega)e^{\theta i} + \omega$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

Bon courage