EXERCICES ET PROBLÈMES

Exercice 1:

1) Simplifier les expressions suivantes.

$$A=(e^{x}+e^{-x})^{2}-(e^{x}-e^{-x})^{2}$$

$$B=(e^{x}-e^{-x})^{2}(e^{2x}+e^{x}+1)$$

2) Montre que pour tout x de **IR** on a :

- $\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\dfrac{1-e^{x}}{e^{x}+1}$
- $\dfrac{1}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

Exercice 2:

Résoudre dans **IR** les équations suivantes.

1) $e^{2x}+e^{x}-2=0$
2) $e^{2x+1}+e^{x+1}-2e=0$
3) $e^{x}-2e^{-x}+1=0$

Exercice 3:

Résolvez dans **IR** les inéquations suivantes.

1) $e^{2x}+e^{x}-2<0$
2) $e^{2x}+2e^{x}-3\geq 0$
3) $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-2}>0$

Exercice 4: calculer les limites suivantes.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x} \qquad B=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{x}}{x^{2}+x}$$

$$C=\lim_{x\to+\infty}\ln x.e^{-x} \qquad D=\lim_{x\to+\infty}x^{2}-e^{x}$$

$$E=\lim_{x\to-\infty}(x^{2}-x)e^{x} \qquad F=\lim_{x\to+\infty}(2-x)e^{-x}$$

$$G=\lim_{x\to+\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1) \qquad H=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+x^{2}}{x+1}$$

Exercice 5:

Démontrer que la fonction f est dérivable sur **IR,** puis calculer $f'(x)$ dans chacun des cas suivants.

1) $f(x)=x.e^{\sqrt{x}}$
2) $f(x)=e^{-x}.\ln x$
3) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}$
4) $f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})$

Exercice 6 :

Déterminer une primitive F de la fonction f sur I.

1) $f(x)=e^{-x+1}$; $I=IR$.
2) $f(x)=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$; $I=IR$.
3) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}$; $I=IR$
4) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}$; $I=IR$
5) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2}}$; $I=IR$
6) $f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{x}-1}{e^{x}-1}$; $I=IR$

Exercice 7 :

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par:

$$f(x)=(2x^{2}-7x+5)e^{x}$$

1) Déterminer la dérivée seconde de la fonction f.
2) Vérifier que :
$(\forall x\in IR);\ f(x)=4e^{x}+2f'(x)-f''(x)$
3) Déterminer une primitive de la fonction f.

Exercice 8:

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par:

$f(x)=x+\dfrac{4}{1+e^{x}}$, On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
2) a) Montrer que: $(\forall x\in IR);\ f'(x)=\left(\dfrac{1-e^{x}}{1+e^{x}}\right)^{2}$

   b) Dresser le tableau de variation de f sur **IR**.

   c) En déduire que $I(0;2)$ est un point d'inflexion.
3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x$ et interpréter graphiquement le résultat trouvé.
4) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x+4$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$
5) Etudier la position relative de (C_f) et (D).
6) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans **IR** , et que $-4<\alpha<-3$.
7) En déduire que : $e^{\alpha}=-1-\dfrac{4}{\alpha}$.
8) Tracer la courbe (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Exercice 9:

Soit f la fonction définie sur **IR** par:

$$f(x)=\left(e^{-x}-1\right)^{2}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. **(unité: 2cm)**

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, et interpréter graphiquement le résultat.
2) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
3) a) Montrer que :

$$(\forall x\in IR);\ f'(x)=2e^{-x}\left(1-e^{-2x}\right)$$

   b) Dresser le tableau de variation de f.
4) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion .
5) Soit g la restriction de la fonction f sur $[0;+\infty[$

   a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1}

   b) Montrer que: $(\forall x\in\geq 0):g^{-1}(x)=-\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$
6) Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 10 : (Sujet 2019 Rattrapage)

Première partie: Soit f la fonction définie sur IR^* par:

$$f(x)=2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. **(L'unité: 1cm)**

1) a) Vérifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, et interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$, et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que pour tout x de IR^* on a:

$$f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$$

b) Vérifier que $(\forall x\in IR);\ x^2-2x+4>0$

c) Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0;2]$, et strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $[2;+\infty[$.

d) Dresser le tableau de variation de f sur IR^*.

4) Tracer (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5) a) Vérifier que la fonction $H: x\mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une primitive de la fonction $h: x\mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur l'intervalle $[2;4]$.

b) Vérifier que

$$(\forall x\in IR^*);\ f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$$

c) Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4}\,dx$.

d) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et l'axe des abscisse et les droites d'équations $x=2$ et $x=4$.

Deuxième partie :

1) Soit g la fonction définie sur $[2;4]$ par:

$$g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$$

a) Calculer $g(4)$.

b) Vérifier que pour tout x de $[2;4]$,

$$g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$$

c) Vérifier que pour tout x de $[2;4]$: $e^{x-4}-1\le 0$ puis en déduire que pour tout x de $[2;4]$: $g(x)\le 0$.

2) a) Vérifier que pour tout x de $[2;4]$:

$$f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$$

b) En déduire que pour tout x de $[2;4]$: $f(x)\le x$.

3) On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=3 \quad et \quad u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de IN.}$$

a) Montrer que pour tout n de IN on a: $2\le u_n\le 4$.

b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire quelle est convergente.

c) Calculer la limite de (u_n).

Exercice 11 :

Partie A : On considère la fonction **g** définie par :

$$g(x)=1-(1+x)e^x$$

1) Dresser le tableau de variation de **g**.

2) Calculer **g(0)**. Puis en déduire le signe de **g(x)**.

Partie B : Soit f la fonction définie sur **IR** par : $f(x)=x(1-e^x)$. On désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) Montrer que la droite $(D): y=x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$. Et préciser la position relative de (D) et (C_f).

3) Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.

4) a) Montrer que pour tout réel x, on a: $f'(x)=g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

5) Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion **I** dont on déterminera ses coordonnées.

6) Construire (D) et (C_f).

Partie C :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0=-1 \quad et \quad u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de IN.}$$

a) Montrer que pour tout n de IN on a: $-1\le u_n\le 0$

b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire quelle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n) .