



## I. La fonction exponentielle népérienne $f(x) = e^x$ :

### a. Activité :

On considère la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \ln x \end{cases}$$

1. Est-ce que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  ?

### b. Vocabulaire et notation :

fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $f$  est appelée la fonction exponentielle népérienne ( ou la fonction exponentielle , on note  $f^{-1} = \exp$  ou  $f^{-1} = e$  .

### c. Définition et propriété :

La fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \ln x \end{cases}$$
 est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  d'où  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  , on l'appelle fonction exponentielle népérienne et on la note par :  $f^{-1} = \exp$  ou  $f^{-1} = e$  avec  $f^{-1} = \exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$   $x \mapsto f^{-1}(x) = \exp(x)$  .

### d. Conséquences :

- La fonction exponentielle népérienne  $f^{-1} = \exp$  ou  $f^{-1} = e$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et la courbe de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à la 1<sup>ère</sup> bissectrice ( la droite d'équation (D) :  $y = x$  )
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ .

• Relation entre  $f(x) = \ln(x)$  et  $f^{-1}(x) = \exp(x)$  est 
$$\begin{cases} \exp(x) = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y > 0 \end{cases}$$

• On a :  $\forall x \in ]0, +\infty[ : f^{-1} \circ f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x)) = x$  donc

$\forall x \in ]0, +\infty[, \exp \circ \ln(x) = x \Leftrightarrow \exp(\ln(x)) = x$

• On a :  $\forall x \in \mathbb{R} : f \circ f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = x$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \circ \exp(x) = x \Leftrightarrow \ln(\exp(x)) = x$

### e. Nouvelle notation :

• On sait que : (1) :  $\forall r \in \mathbb{Q}, r = \ln(e^r)$  d'où

(1)  $\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = \exp(\ln(e^r)) \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{Q}, \exp(r) = e^r$

On obtient :  $\forall r \in \mathbb{Q} : \exp(r) = e^r$  par conséquence on va prolonger ce résultat à tous les nombres réels  $x$  .

• d'où la nouvelle notation :  $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = e^x$ .

$f^{-1} = \exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[$

Donc :

$x \mapsto f^{-1}(x) = \exp(x) = e^x$



f. Propriétés :

1.  $y = e^x \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$  et  $\forall x > 0 : e^{\ln x} = x$  et  $\forall x \in \mathbb{R} : \ln(e^x) = x$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ .

2.  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$  et  $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$ .

g. Exemples :

1.  $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3$   
 $\Leftrightarrow x = \ln 3$

2.  $e^{\ln(24)} = 24$  et  $\ln(e^{-13}) = -13$ .

3. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante  $e^{x+3} = e^{2x+7}$ .

On a :  $e^{x+3} = e^{2x+7} \Leftrightarrow x+3 = 2x+7 \Leftrightarrow x = -4$

Ensemble des solutions de l'équation est  $S = \{-4\}$ .

4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $e^{x+1} < e^{6x-2}$ .

On a :  $e^{x+1} < e^{6x-2} \Leftrightarrow x+1 < 6x-2$   
 $\Leftrightarrow -5x < -3$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[ \frac{3}{5}, +\infty \right[$$

Ensemble des solutions de l'inéquation est :  $S = \left[ \frac{3}{5}, +\infty \right[$ .

5. Ensemble de définition des fonctions :  $f(x) = \frac{2}{e^x}$  et  $g(x) = \sqrt{e^x}$

•  $x \in D_f \Leftrightarrow e^x \neq 0$  ceci est vrai quelque soit  $x$  de  $\mathbb{R}$  car  $e^x > 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}$ .

•  $x \in D_f \Leftrightarrow e^x \geq 0$  on sait quelque soit  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a  $e^x > 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}$ .

## III. Propriétés algébriques :

a. Propriétés :

Soient  $a$  et  $b$  et  $x$  de  $\mathbb{R}$  et  $r \in \mathbb{Q}$  on a :

propriétés	Exemples	propriétés	Exemples	
$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^7 = e^4 \times e^3$	1 $(e^x)^r = e^{rx}$ $(r \in \mathbb{Q})$	$(e^x)^3 = e^{3x}$	4
$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$	$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$	2 $\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$	$\sqrt{e^{x-3}} = e^{\frac{1}{2}(x-3)}$	5
$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$	$e^5 = \frac{e^7}{e^2}$	3 $\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{3}x}$	$\sqrt[3]{e^{2+2x}} = e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$	6



b. Preuve : pour  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ .

On pose :  $A = e^{a+b}$  et  $B = e^a \times e^b$

On a :

$$A = e^{a+b} \Leftrightarrow \ln(A) = \ln(e^{a+b})$$

$$\Leftrightarrow \ln(A) = a + b \quad , \quad (1)$$

$$\text{Et : } B = e^a \times e^b \Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a \times e^b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(B) = \ln(e^a) + \ln(e^b)$$

$$\Leftrightarrow \ln(B) = a + b \quad , \quad (2)$$

D'après (1) et (2) on obtient :  $\ln(A) = \ln(B)$  donc  $A = B$  c.à.d.  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ .

Conclusion :  $e^{a+b} = e^a \times e^b$ .

c. Remarques :

- $e^x \times e^x = (e^x)^2 = e^{2x}$  et  $e^x \times e^x \times e^x = (e^x)^3 = e^{3x}$ .

- $\underbrace{e^x \times e^x \times \dots \times e^x}_n = (e^x)^n = e^{nx}$ .

- $f(x) = e^{u(x)}$ ,  $x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$

### III. Limites :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \times e^x = 0^-$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \times e^x = 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$	
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$	

a. Exemple :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x}$  :

1<sup>ère</sup> méthode :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \times e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times e^x = +\infty$ .

2<sup>ème</sup> méthode :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x}$   
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} \quad (t = 2x ; x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty)$   
 $= +\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x}{x^3}$  :

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} + \frac{2}{x^2} = +\infty$  ( car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$  )



## IV. Dérivée de la fonction $f(x) = e^x$ et $f(x) = e^{u(x)}$ .

### a. Théorème :

la fonction  $f(x) = e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a :  $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$ .

### b. Preuve :

On pose :  $f(x) = \ln(x)$  et  $f^{-1}(x) = \exp(x)$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et sa fonction dérivée est  $f'(x) = \frac{1}{x}$  qui ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[$  donc sa fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f([0, +\infty[) = \mathbb{R}$  et

$$\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

Conclusion :  $\forall x \in \mathbb{R} : (e^x)' = e^x$ .

### c. Théorème :

Si la fonction  $u(x)$  est dérivable sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $f(x) = e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et sa fonction dérivable est  $f'(x) = [e^{u(x)}]' = u'(x)e^{u(x)}$ .

### d. Exemple :

Soit la fonction  $f(x) = e^{5x^3+3x}$

$$\text{On a : } f'(x) = [e^{5x^3+3x}]' = (5x^3 + 3x)' \times e^{5x^3+3x} = (15x^2 + 3) e^{5x^3+3x}.$$

### e. Remarque :

Les fonctions primitives de la fonction  $g(x) = u'(x)e^{u(x)}$  sont les fonctions de la forme

$$G(x) = e^{u(x)} + c ; (c \in \mathbb{R}).$$

### f. Exemple :

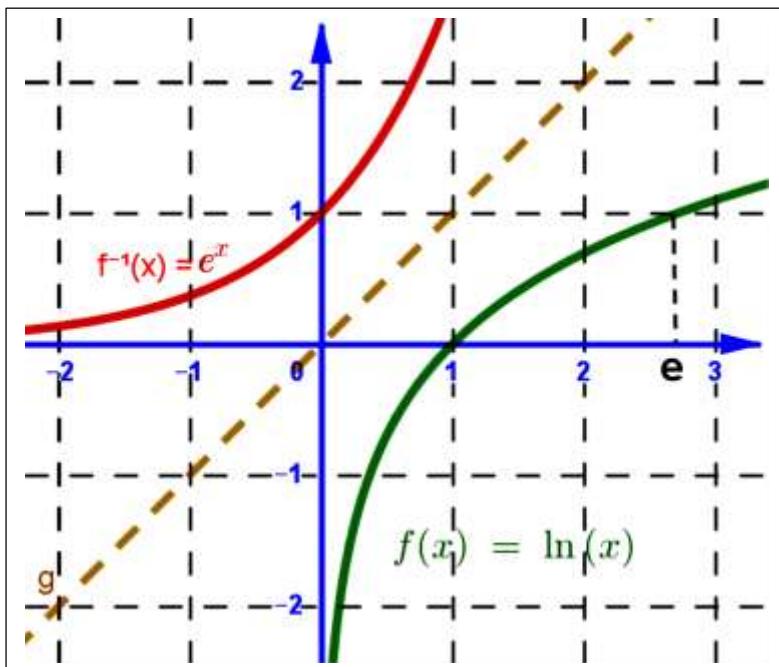
On détermine les primitives de la fonction  $f(x) = x \cdot e^{3x^2+1}$  sont les fonctions de la forme  $F(x) = \frac{1}{6} e^{3x^2+1} + c$

## V. Etude de la fonction $f(x) = e^x$ :

Tableau de variation de  $f$  :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'$	+	
f		$\nearrow$ $+\infty$
	0	

La courbe représentative de  $f$



**VI.** Fonction exponentielle de base  $a$  avec  $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$  :

a. Définition :

Soit  $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ .

La fonction définie par :  $\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$  est continue et strictement monotone sur  $]0,+\infty[$

donc elle admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ , on l'appelle fonction exponentielle de base  $a$  et définie par :

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]0,+\infty[$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \exp_a(x)$$

b. Nouvelle notation :

• On a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \log_a(y) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x \\ &\Leftrightarrow \ln(y) = x \ln(a) \\ &\Leftrightarrow y = e^{x \ln(a)} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f^{-1}(x) = \exp_a(x) = e^{x \ln(a)}$$

• On prend  $x = r \in \mathbb{Q}$  on a :  $f^{-1}(r) = \exp_a(x) = e^{r \ln(a)} = e^{\ln(a)r} = a^r$  d'où :  $\exp_a(x) = a^x$ .

• On prolonge cette écriture pour tous les nombres réels  $x$  de  $\mathbb{R}$  on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{-1}(x) = e^{x \ln(a)} = a^x$ .



**• Conclusion :**

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x \ln a} = a^x$ .

**c. Exemple :**

$$5^x = e^{x \ln 5} \text{ et } \left(\frac{1}{5}\right)^x = e^{-x \ln 5} \text{ et } 10^x = e^{x \ln 10}.$$

**d. Remarques :**

- Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a :  $\log_a(a^x) = x$ .
- Pour tout  $x > 0$  on a :  $a^{\log_a(x)} = x$ .
- Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  on a :  $10^x = y \Leftrightarrow x = \log(y)$ .

**e. Conséquences :**

Soit  $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$  et la fonction  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ .

1. La fonction  $f$  est continue et dérivable sur l'intervalle  $\mathbb{R}$ .

$$[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times e^{x \ln a} = (\ln(a)) \times a^x.$$

3. D'où le signe :  $[f(x)]' = (a^x)' = (\ln(a)) \times a^x$  est le signe de  $\ln a$ .

•  $0 < a < 1$  alors  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  strictement croissante d'où :  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$ .

•  $a > 1$  alors  $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$  strictement décroissante d'où :  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$ .

**f. Propriétés :**

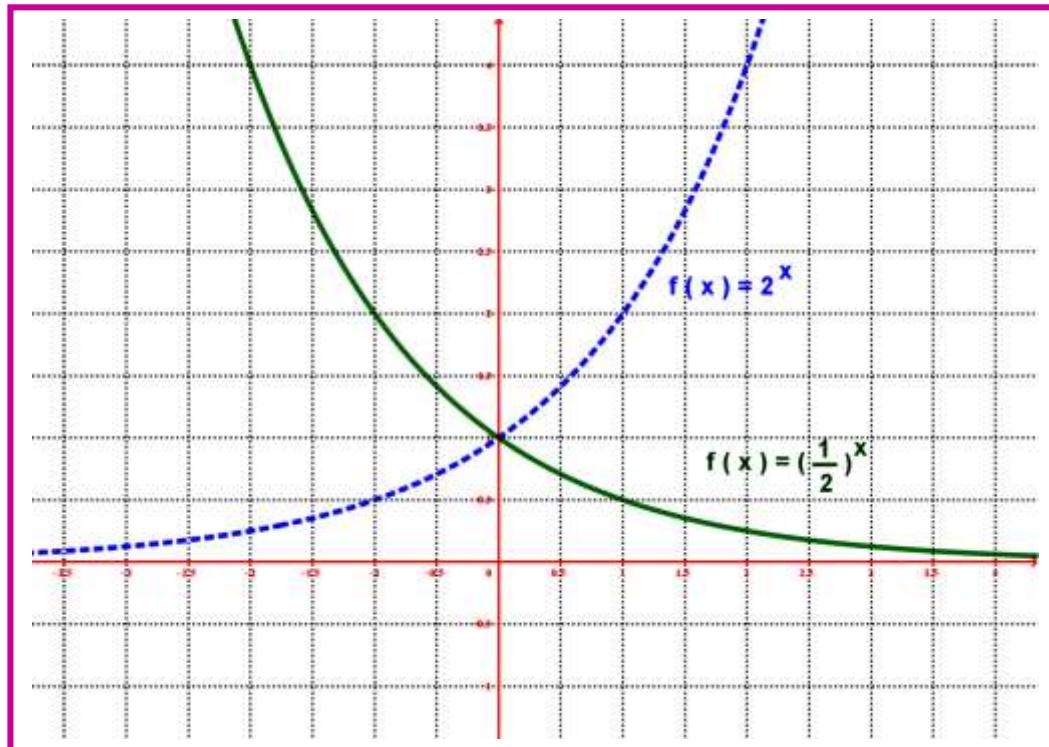
$a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$  et  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  on a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \text{ et } (a^x)^y = a^{xy} \text{ et } \frac{1}{a^x} = a^{-x} \text{ et } \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

**g. La courbe représentative de  $f(x) = a^x$  avec  $a \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$ .**

$$\text{Cas } 0 < a < 1 \text{ on prend } a = \frac{1}{2} \text{ donc } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x.$$

$$\text{Cas } a > 1 \text{ on prend } a = 2 \text{ donc } f(x) = 2^x.$$



**h. Exemple :**

1. Ecrire la fonction  $f(x) = 3^{x^3-x}$  en fonction de la fonction exponentielle népérienne .
2. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .
3. Calculer :  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  .

**Correction :**

1. **On écrit la fonction  $f$  :**

$$\text{On a : } f(x) = 3^{x^3-x} = e^{(x^3-x)\ln 3} .$$

2. **Les limites :**

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x^3-x)\ln 3} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3-x)\ln 3 = +\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$  .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x^3-x)\ln 3} = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3-x)\ln 3 = -\infty$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$  .

3. **Dérivée :**

$$\text{On a : } d = f'(x) = \left( e^{(x^3-x)\ln 3} \right)' = \left( (x^3-x)\ln 3 \right)' \times e^{(x^3-x)\ln 3} = \left( (3x^2-1)\ln 3 \right) \times e^{(x^3-x)\ln 3} .$$