Fonction logarithme

I) *Fonction logarithme népérien.*

Activité :

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Définition: La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en **1** (c'est-à-dire $\ln(1)=0$), est appelée la fonction logarithme népérien, cette fonction est notée **ln**.

2) En déduire que la fonction **ln** est continue et dérivable sur $I =]0;+\infty[$, et que **ln** est strictement croissante sur I.

3) Etudier le signe de la fonction **ln** sur $]0;+\infty[$.

4) Montrer qu'il existe un, et un seul, nombre ***e*** de l'intervalle $]2,72\,;\,2,73[$ tel que $\ln(e)=1$.

5) Soit ***f*** une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x)=\ln(kx)-\ln(x)$ et $k>0$.

- **a-** Montrer que f' est nulle, puis en déduire la monotonie de ***f***.
- **b-** Donner $f(1)$, puis en déduire que $\ln(kx)=\ln(k)+\ln(x)$.
- **c-** En déduire que pour tout couple $(a;b)$ de réels strictement positifs et pour tout relatif ***n*** on a : $\ln(ab)=\ln a+\ln b$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$; $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$; $\ln\left(a^n\right)=n.\ln a$ et $\ln\left(e^n\right)=n$.

6) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat.

7) Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ et donner l'équation de la tangente de $(C_{\ln})$ au point $A(1;0)$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

8) Considérons la fonction ***g*** définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x)=2\sqrt{x}-\ln(x)$.

- **a)** Montrer que la fonction ***g*** est croissante sur $[1;+\infty[$.
- **b)** Montrer que la fonction ***g*** est minorée par **2**, et en déduire que $(\forall x\geq 1);\ 0\leq\frac{\ln x}{x}\leq\frac{2}{\sqrt{x}}$.
- **c)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat, puis calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$.

9) Etudier la concavité de **ln,** puis tracer $(C_{\ln})$ dans un repère orthonormé.

10) Soit ***u*** une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle ***I*** de **IR.** Montrer que $x\mapsto\ln(u(x))$ est dérivable sur ***I*** et que $\left(\ln(u(x))\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

Conséquences

La fonction **ln** est définie, **continue** et **dérivable** sur $]0;+\infty[$, et pour tout réel strictement positif on a : $\ln'(x)=\frac{1}{x}$, de plus.

Propriétés algébriques

Pour tous réels ***a*** et ***b*** strictement positifs, on a :

- $\ln(ab)=\ln a+\ln b$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\ln(e)=1$
- $\ln\left(a^n\right)=n\ln a\ \ (n\in\mathbb{Z})$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\ln a$
- $\ln\left(e^n\right)=n\ \ (n\in\mathbb{Z})$

Equations et inéquations

Pour tous réels ***x*** et y strictement positifs, on a :

- $\ln x=\ln y\Leftrightarrow x=y$
- $\ln x<\ln y\Leftrightarrow x<y$
- $\ln x<0\Leftrightarrow 0<x<1$
- $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=0$
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Corollaire **:** Si ***u*** est une fonction dérivable sur ***I*** telle que $u(x)\neq 0$ pour tout réel ***x*** de ***I***, alors la fonction $f: x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives de la forme : $x\mapsto\ln|u(x)|+c$ où ***c*** est une constante réelle.

II) *Logarithme décimal.*

Définition : La fonction logarithme décimal, noté **log**, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$.

III) *Logarithme de base a avec* $a\in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Définition : La fonction logarithme de base ***a***, noté $\log_a$, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\log_a(x)=\frac{\ln x}{\ln a}$.