

## Résumé de Cours

**PROF : ATMANI NAJIB    La fonction logarithme népérien    2ème BAC Sciences ex (pc-svt...)**

### La fonction logarithme népérien :

La fonction logarithme népérien notée  $\ln$  est l'unique fonction, définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  et vérifiant  $\ln 1 = 0$  et pour tout réel  $x > 0$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

Il est continu et strictement croissant sur  $]0, +\infty[$ .

Premières propriétés (directement liées à la définition)

Pour tous réels :  $\forall x > 0 ; \forall y > 0 ; \forall r \in \mathbb{Q}$

$$1) \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y \quad 2) x \leq y \Leftrightarrow \ln x \leq \ln y$$

$$3) \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad 4) \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$5) \ln(x \times y) = \ln x + \ln y \quad 6) e \approx 2,71828\dots \text{ et } \ln(e) = 1$$

$$7) \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad 8) \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$9) \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a \quad 10) \ln(x^r) = r \ln x$$

$$11) \ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 12) (e^{\ln x} = x) \quad (\forall x > 0)$$

$$13) e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et } \forall y > 0$$

### (Limites usuelles)

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad (\text{où } r \in \mathbb{Q}_*^+)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0 \quad (\text{où } r \in \mathbb{Q}_*^+)$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

### Dérivée et primitives de la fonction $x \rightarrow \ln(u(x))$

1) Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction :  $f(x) = \ln(|u(x)|)$  est dérivable sur  $I$

$$\text{et } (\forall x \in I) (f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)})$$

2) Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors les fonctions primitives de la fonction  $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$  sont

les fonctions ;  $F(x) = \ln(|u(x)|) + Cte$

### FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE $a$

Soit ( $a > 0$ ) et ( $a \neq 1$ )

On note  $\log_a$  la fonction logarithmique de base  $a$

définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) (\log_a = \frac{\ln x}{\ln a})$

$\forall x > 0 ; \forall y > 0 ; \forall r \in \mathbb{Q}$

$$1) \log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y \quad 2) \log_a(1/x) = -\log_a x$$

$$3) \log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y \quad 4) \log_a(\sqrt{x}) = (1/2)\log_a x$$

$$5) \log_a(x^r) = r \log_a x$$

$$6) \log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$$

$\forall x \in ]0, +\infty[ ; (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$  donc La fonction  $\log_a$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$

$$1) (\forall x > 0)(\forall y > 0) (\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y)$$

$$2) (\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r)$$

$\log_a$  strictement croissante si ( $a > 1$ )

$\log_a$  strictement décroissante si ( $0 < a < 1$ )

### Cas particulier $a = 10$ ; logarithme décimal :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par  $\log$  et  $(\forall x \in ]0, +\infty[) (\log x = \frac{\ln x}{\ln 10})$  et on a :  $\log(10) = 1$

$$1) (\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$$

$$2) (\forall r \in \mathbb{Q}) (\log(10^r) = r) \quad 3) \log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

