



I. Fonction logarithme népérienne :

a. Activité :

On considère la fonction définie par :
$$\begin{cases} f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

1. Est-ce que admet une fonction primitive sur $]0, +\infty[$? (justifier votre réponse).

2. Combien de fonctions primitives F tel que $F(1) = 0$?

b. Définition :

La fonction primitive F de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 ($F(1) = 0$) s'appelle

La fonction logarithme népérienne et note $F(x) = \ln(x)$ ou $F(x) = \ln x$. Avec

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

c. Remarque :

Au lieu d'écrire $F(x) = \ln x$ on écrit $f(x) = \ln x$.

d. Conséquences :

- $\ln 1 = 0$
- La fonction $f(x) = \ln x$ est définie sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $f(x) = \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (car $(\ln x)' = \frac{1}{x}$).
- La fonction $f(x) = \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$ (car la fonction logarithme népérienne est dérivable).
- La fonction $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (car $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$).
- En déduit $\forall a, b \in]0, +\infty[$, $a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$ et $\forall a, b \in]0, +\infty[$, $a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$.

e. Exercice :

- Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{3}{\ln x}$.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

Conclusion : $D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ ou $D_f =]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

- Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ et $\ln x \geq 0$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x \geq \ln 1$$



$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in [1, +\infty[$$

Conclusion : $D_f = [1, +\infty[$.

- Résoudre l'équation suivante : (E) : $\ln(2x) - \ln(x-1) = 0$.

➤ On détermine D_E l'ensemble de définition de l'équation (E).

$$x \in D_E \Leftrightarrow 2x > 0 \text{ et } x-1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Conclusion 1 : $D_E =]1, +\infty[$.

On résout l'équation dans D_E

$$\ln(2x) - \ln(x-1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) = \ln(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x = x-1$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \notin D_E =]1, +\infty[$$

Conclusion 2 : l'équation (E) n'a pas de solution donc $S = \emptyset$

- Résoudre l'équation suivante : (E') : $\ln(2x) - \ln(x-1) \leq 0$.

➤ On détermine $D_{E'}$ l'ensemble de définition de l'inéquation (E').

D'après la question précédente on a : $D_{E'} =]1, +\infty[$.

On résout l'équation dans $D_{E'}$

$$\ln(2x) - \ln(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(2x) \leq \ln(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq x-1$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1]$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty, -1] \cap D_{E'} =]-\infty, -1] \cap]1, +\infty[= \emptyset$

Conclusion 2 : l'inéquation (E') n'a pas de solution donc $S = \emptyset$

f. Signe de $\ln x$:

Soit : $x \in]0, +\infty[$ on a trois cas :

- 1^{er} cas : $x = 1$ donc : $\ln 1 = 0$.
- 2^{ième} $x \in]1, +\infty[$, donc : $x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1$ (c.à.d. $x > 1 \Rightarrow \ln x > 0$ (car $\ln 1 = 0$)).
- 3^{ième} cas $x \in]0, 1[$, donc : $x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln 1$ (c.à.d. $x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$)
- D'où le signe de $\ln x$ par un tableau

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	0 +



III. Propriétés algébriques :

a. Propriétés :

Pour tous $a > 0$ et $b > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a :

$$1. \ln(ab) = \ln a + \ln b \text{ (propriété admise).}$$

$$2. \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a.$$

$$3. \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

$$4. \ln a^r = r \ln a.$$

b. Preuve pour la 2^{ème} et la 3^{ème} :

- Pour la 2^{ème} :

$$\text{On a : } 0 = \ln 1 \Leftrightarrow 0 = \ln \frac{a}{a}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right) \text{ ; (propriété n° 1)}$$

$$\Leftrightarrow -\ln a = \ln\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Conclusion : } \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

- Pour la 3^{ème} :

$$\ln\frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right)$$

$$\text{On a : } = \ln a + \ln\frac{1}{b}$$

$$= \ln a - \ln b \text{ ; (propriété n° 2)}$$

$$\text{Conclusion : } \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

c. Remarque :

- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln a$ et $\ln(\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3} \times \ln a.$

- On écrit :

- $\ln(x) \times \ln(x) = \ln^2(x).$

- On général : $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\underbrace{\ln(x) \times \ln(x) \times \dots \times \ln(x)}_{n \text{ fois}} = \ln^n(x) = \ln^n x$



d. Exemple :

1. On pose $\ln 2 = 0,7$ et $\ln 3 = 1,1$; calculons : $\ln 4$ et $\ln 8$ et $\ln \sqrt{3}$ et $\ln \sqrt[3]{2}$ et $\ln \sqrt[3]{3^5}$. On a :

- $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2 = 2 \times 0,7 = 1,4$ donc : $\ln 4 = 1,4$.
- $\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2 = 3 \times 0,7 = 2,1$ donc : $\ln 8 = 2,1$.
- $\ln \sqrt[3]{2} = \ln 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln 2 = \frac{1}{3} \times 0,7 \approx 0,233$ donc : $\ln \sqrt[3]{2} = 0,233$.
- $\ln \sqrt{3} = \ln 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \times 1,1 = 0,55$ donc : $\ln \sqrt{3} = 0,55$.
- $\ln \sqrt[3]{3^5} = \ln 3^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \ln 3 = \frac{5}{3} \times 1,1 \approx 1,833$.

2. Simplifier :

$$\begin{aligned}
 \ln^2(3 - \sqrt{2}) - \ln^2(3 + \sqrt{2}) &= (\ln(3 - \sqrt{2}) + \ln(3 + \sqrt{2})) \times (\ln(3 - \sqrt{2}) - \ln(3 + \sqrt{2})) \\
 &= \ln[(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})] \times \ln\left(\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}}\right) \\
 &= \ln(9 - 2) \times \ln\left(\frac{(3 - \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})}{9 - 2}\right) \\
 &= \ln 7 \times \ln\left(\frac{9 - 6\sqrt{2} + 2}{7}\right) = \ln 7 \times \ln\left(\frac{11 - 6\sqrt{2}}{7}\right) \quad ; \text{ (on ne peut pas simplifier)}
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\ln^2(3 - \sqrt{2}) - \ln^2(3 + \sqrt{2}) = \ln 7 \times \ln\left(\frac{11 - 6\sqrt{2}}{7}\right)$.

III. Limites :

a. Propriétés :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln(x) = 0^-$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \times \ln(x) = 0^-$
$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

b. Remarques :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$. Donc la courbe (C_f) de f admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique (à déterminer).
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .



c. Application :

1. Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+2} \times \frac{x+2}{x} = 0$ car :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x+2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ (avec $t = x+2$ et $x \rightarrow +\infty$ alors $t \rightarrow +\infty$).

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = 1$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} = 0$

2. Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x \times \ln x}$.

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0^-$ (propriété) d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x \times \ln x} = -\infty$.

Conclusion : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x \times \ln x} = -\infty$.

3. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^3}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (propriété) et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\left(\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \right)$.

IV. Fonction de la forme : $f(x) = \ln(u(x))$

a. Remarque :

On pose : $g(x) = \ln x$ et la fonction $u(x)$ donc : $g \circ u(x) = g(u(x)) = \ln(u(x))$.

Conclusion : la fonction $f(x) = \ln(u(x))$ est la composée de deux fonctions .

- Domaine de définition de f est de la manière suivante : $x \in D_f \Leftrightarrow (x \in D_u \text{ et } u(x) > 0)$.
- Si de plus la fonction $u(x)$ est dérivable on a : $\left[\ln(u(x)) \right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.
- De même on a : $\left[\ln(|u(x)|) \right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

b. Démonstration :

- pour $\left[\ln(u(x)) \right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$



$$f'(x) = [\ln(u(x))]' = [g(u(x))]' = u'(x) \times g'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} \text{ car } g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Conclusion : $[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

- Pour $[\ln(|u(x)|)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

1^{er} cas $|u(x)| = u(x)$ déjà démontrer .

2^{ième} cas $|u(x)| = -u(x)$

on a : $[\ln(|u(x)|)]' = [\ln(-u(x))]' = (-u(x))' \times \ln'(-u(x)) = -u'(x) \times \frac{1}{-u(x)} = \frac{u(x)}{u(x)}$.

Conclusion : $[\ln(|u(x)|)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

c. Exemple :

Calculons f' avec $f(x) = \ln|x^2 - x|$.

On a : $f'(x) = [\ln|x^2 - x|]' = \frac{(x^2 - x)'}{x^2 - x} = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$.

d. Vocabulaire et remarque :

❖ Soit f fonction dérivable sur I et $\forall x \in I : u(x) \neq 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur I .

❖ Puis que $[\ln(|u(x)|)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions de la forme $F(x) = \ln|u(x)| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

e. Exemple :

❖ Trouver les fonctions primitives de la fonction $f(x) = \frac{5}{x-2}$ sur $]2, +\infty[$.

On a : $f(x) = \frac{5}{x-2} = \frac{(x-2)'}{x-2}$.

donc : les fonctions primitives de la fonction $f(x) = \frac{5}{x-2}$ sont les fonctions de la forme

$F(x) = \ln|x-2| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$, puis que $x \in]2, +\infty[$ donc $F(x) = \ln(x-2) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Conclusion : les fonctions primitives de la fonction $f(x) = \frac{5}{x-2}$ sont $F(x) = \ln(x-2) + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

❖ Trouver la fonction dérivée logarithmique de la fonction $u(x) = 3x^2 - 5x$.



La fonction dérivée logarithmique de u est fonction suivante $x \rightarrow \frac{6x-5}{3x^2-5x}$.

V. Etude de la fonction $f(x) = \ln x$:

- Domaine de définition : $D_f =]0, +\infty[$.
- Continuité : f est continue sur $D_f =]0, +\infty[$.
- Limites :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$. Donc la courbe (C_f) de f admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$. Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique on détermine :

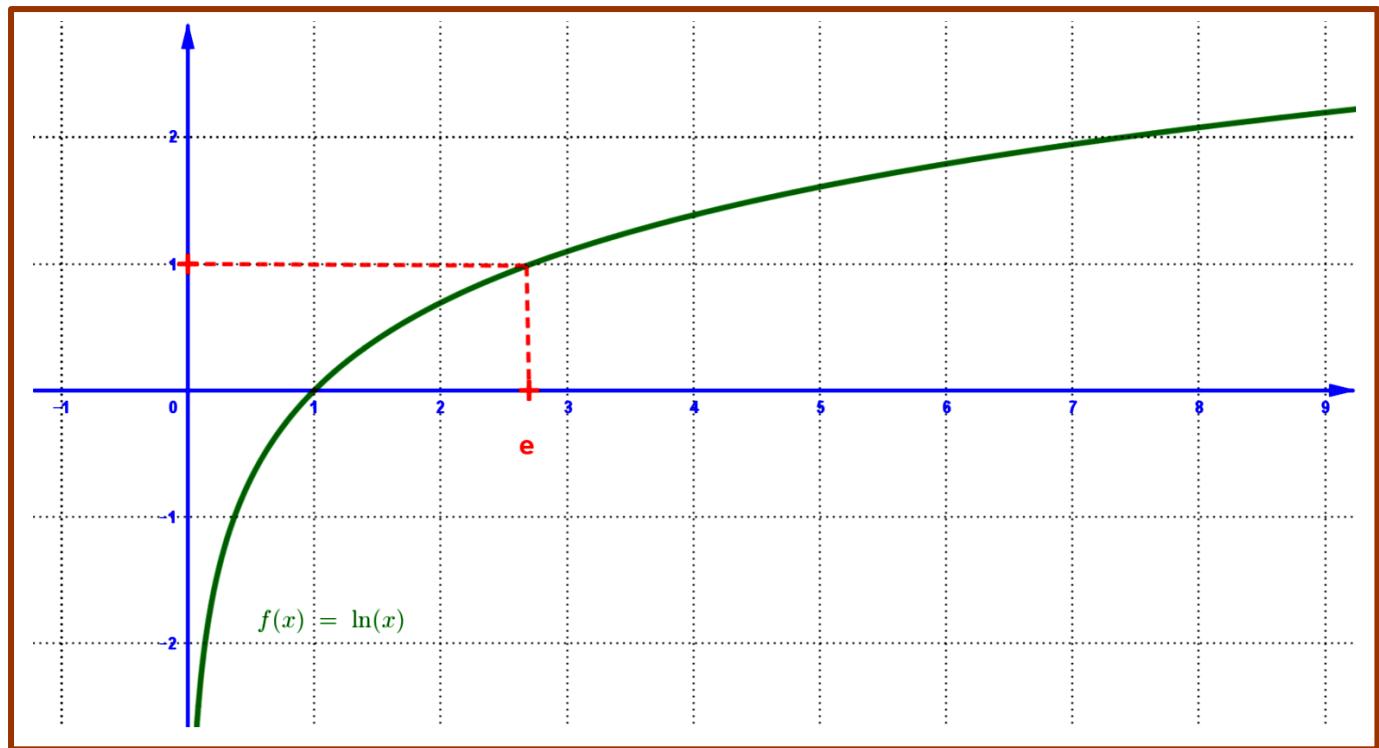
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .

- Sens de variation de f .

- La fonction dérivée de f est : $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$
- La fonction est strictement croissante sur $D_f =]0, +\infty[$
- Tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
f'		+	
f		0	$+\infty$

- La courbe représentative de f :





❖ Remarque :

- La fonction $f(x) = \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- La fonction $f(x) = \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Donc : $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ donc l'équation $x \in]0, +\infty[$; $f(x) = 1$ admet une solution et une seule on note ce nombre unique par $e \approx 2,718$ (valeur approchée) qui est un nombre irrationnel.
- Conclusion :** $\ln e = 1$ et $\ln \frac{1}{e} = -1$ et $\ln e^r = r$; ($r \in \mathbb{Q}$).
- Application :** on détermine l'ensemble de définition de $f(x) = \frac{1}{3 - \ln(x)}$.

$$x \in D_f \Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 3 - \ln(x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln(x) \neq \ln e^3$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x \neq e^3$$

D'où : ensemble de définition de f est : $D_f =]0, e^3[\cup]e^3, +\infty[$.

V. Fonction logarithme de base a et propriétés :

A. Fonction logarithme de base a :

a. Définition :

Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (c.à.d. a strictement positif et différent de 1).

La fonction définie par :

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

S'appelle la fonction logarithme de base a , on note cette fonction par $f = \log_a$ d'où : $f(x) = \log_a(x)$.

b. Conséquences :

- $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ et $\log_a(1) = \frac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0$.
- $\log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$ et $\log_a(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}$.

c. Cas particuliers :

- Cas $a = e$:** $\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$ donc logarithme de base $a = e$ est le logarithme népérien.
- Cas $a = 10$:** on obtient la fonction $f(x) = \log_{10}(x)$ s'appelle la fonction logarithme décimale on note $\log_{10} = \text{Log}$ d'où : $f(x) = \log_{10}(x) = \text{Log}(x)$.
- $\text{Log}(10^r) = r$; $\text{Log}(10) = 1$; $\text{Log}(1) = 0$.



B. Propriétés logarithme de base a :

a. Propriétés :

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout x et y de $]0,+\infty[$ on a :

- $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$.
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- $\log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$ avec $r \in \mathbb{Q}$.
- $\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \times \log_a(x)$ et $\log_a(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \times \log_a(x)$.

b. Démonstration :

Démonstration pour $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

$$\text{On a : } \log_a(x \times y) = \frac{\ln(x \times y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y)$$

Conclusion : $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

C. Etude de la fonction : $f(x) = \log_a(x)$: avec $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

- Domaine de définition de f : $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ d'où $D_f =]0,+\infty[$.
- Continuité de f : f est continue sur $]0,+\infty[$.
- Limites aux bornes de D_f :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \begin{cases} +\infty \text{ si } a \in]1,+\infty[\\ -\infty \text{ si } a \in]0,1[\end{cases}$$

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \begin{cases} -\infty \text{ si } a \in]1,+\infty[\\ +\infty \text{ si } a \in]0,1[\end{cases}$$

- Sens de variations de f :

$$\triangleright \text{Dérivée : } f'(x) = (\log_a(x))' = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(a)} \right]' = \frac{1}{\ln(a)} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a} . \text{ d'où : } (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a} .$$

$$\triangleright f'(x) \begin{cases} \geq 0 \text{ si } a \in]1,+\infty[\\ \leq 0 \text{ si } a \in]0,1[\end{cases}$$

➤ Tableau de variations de f .

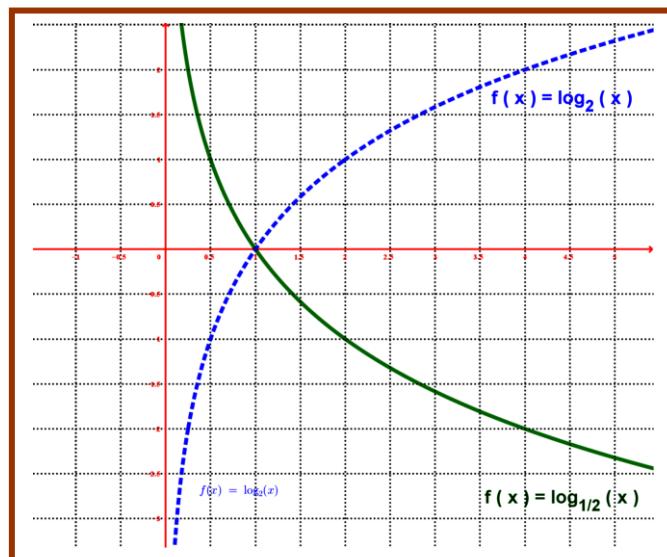
Cas $a \in]1, +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
f'		+	
f		0	$+\infty$

cas $a \in]0, 1[$:

x	0	1	$+\infty$
f'		+	
f	$+\infty$	0	$-\infty$

- Courbe représentative de f dans un repère orthonormé $a = 2$ et $a = \frac{1}{2}$.



c. Exercices :

1. On simplifie :

$$\begin{aligned}
 \log_2(8) - \log_2(\sqrt[3]{32}) + \log_2(9) - \log_2(3) &= \log_2(2^3) - \log_2\left(2^{\frac{5}{3}}\right) + \log_2(3^2) - \log_2(3) \\
 &= 3 - \frac{5}{3} + 2\log_2(3) - \log_2(3) \\
 &= \frac{4}{3} + \log_2(3)
 \end{aligned}$$

2. On simplifie :

$$\begin{aligned}
 \log_3\left(\frac{15}{4}\right) + \log_2\left(\frac{1}{27}\right) + \log_3\left(\frac{4}{5}\right) &= \log_3\left(\frac{15}{4} \times \frac{4}{5}\right) + \log_2(3^3) \\
 &= \log_3 3 - \log_2 3^3 \\
 &= 1 - \log_2 27 \\
 &= \log_2(2) - \log_2(27) \\
 &= \log_2\left(\frac{2}{27}\right)
 \end{aligned}$$



3. On simplifier :

$$\begin{aligned} \log(100) - \log(10^{2013}) + \log\left(\frac{1}{10^{100}}\right) &= \log 10^2 - \log 10^{2019} - \log 10^{100} \\ &= 2 \log 10 - 2019 \log 10 - 100 \log 10 \\ &= -2117 \log 10 \end{aligned}$$

4. Montrer que : $\forall a, b \in]1, +\infty[$; $\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$

$$\text{On a : } \frac{1}{\log_a(b)} = \frac{1}{\frac{\ln a}{\ln b}} = \frac{\ln a}{\ln b} = \log_b(a).$$

$$\text{Conclusion : } \forall a, b \in]1, +\infty[; \log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}.$$

5. Résoudre dans \mathbb{R} : l'équation suivante $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$.

- On détermine domaine de définition de l'équation :

On a ;

$$x \in D_E \Leftrightarrow 2x > 0 \text{ et } x > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in]0, +\infty[$$

Donc domaine de définition de l'équation est $D_E =]0, +\infty[$.

- On résout l'équation dans $D_E =]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0 &\Leftrightarrow \log_3(2x) = 0 \text{ ou } (\log_5(x) - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \log_3(2x) = \log_3(1) \text{ ou } \log_5(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x = 1 \text{ ou } x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \in D_E \text{ ou } x = 1 \in D_E \end{aligned}$$

Conclusion : ensemble des solutions de l'équation est $S = \left\{ \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

6. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante $\log_{\sqrt{3}}(3x-1) \geq \log_{\sqrt{3}}(x+1)$.

- On détermine domaine de définition de l'inéquation :

On a ;

$$x \in D_E \Leftrightarrow 3x-1 > 0 \text{ et } x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{3} \text{ et } x > -1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$$

Donc domaine de définition de l'équation est $D_{E'} = \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$.

- On résout l'équation dans $D_{E'} = \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[$:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{3}}(3x-1) \geq \log_{\sqrt{3}}(x+1) &\Leftrightarrow 3x-1 > x+1 ; \left(\text{ car } a = \sqrt{3} > 1 \right) \\ &\Leftrightarrow 2x > 2 \\ &\Leftrightarrow x > 1 \\ &\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[\end{aligned}$$

Conclusion: ensemble des solutions de l'inéquation est $S = D_{E'} \cap]1, +\infty[= \left] \frac{1}{3}, +\infty \right[\cap]1, +\infty[=]1, +\infty[$

7. Etudier la fonction suivante : $f(x) = \log_5(x+1)$

- Domaine de définition de f :

$$x \in D_E \Leftrightarrow x+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

$$\Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[$$

domaine de définition de f est $D_{E'} =]-1, +\infty[$

- Limites aux bornes de D_f :

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \log_5(x+1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln 5} = -\infty .$$

car $\lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$; $\left(\lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+ \right)$ et $\ln 5 > 0$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_5(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln 5} = +\infty .$$

car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$; $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty \right)$ et $\ln 5 > 0$

- Branches infinies ;

✓ Puis que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ donc la courbe (C_f) admet une asymptote verticale la droite d'équation $x = -1$.

✓ On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ on détermine $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(x+1)}{\ln 5}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x \ln 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{1}{\ln 5} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \left(x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty \right)$$

D'où : la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées .

- Sens de variations de f :

- Fonction dérivée de f :

$$f'(x) = (\log_5(x+1))' = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln 5} \right)' = \frac{1}{\ln 5} \times \frac{(x+1)'}{x+1} = \frac{1}{\ln 5} \times \frac{1}{x+1} > 0 \text{ car } x \in]-1, +\infty[$$

- Tableau de variations de f :

x	-1	$+\infty$
f'	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

- La courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

