

**TD : Exercices**

**Sur LES SUITES NUMERIQUES**

**Exercice1** : Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \\ u_0 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Et Soit la suite récurrente  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) montrer que  $0 \leq u_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

b) que peut-on déduire pour la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

3) montrer que la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique

et déterminer sa raison et son premier terme

4) déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$

5) déterminer  $\lim v_n$  et  $\lim u_n$

**Exercice2** : Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie

$$\text{par : } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Et Soit la suite récurrente  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$v_n = \frac{1}{u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 1) \text{calculer : } u_1 \text{ et } v_0$$

2) montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arithmétique

et déterminer sa raison et son premier terme

3) déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$  et en déduire  $u_n$  en fonction de  $n$

4) déterminer  $\lim v_n$  et  $\lim u_n$

**Exercice3** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente

$$\text{définie par : } \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n$

3- Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 2$

**Exercice4** : soit  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :

$$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est minorée par 0

2) Montrer que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est majorée par  $\frac{1}{2}$

3) Que peut-on déduire ?

**Exercice5** : Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie

$$\text{par : } u_n = \frac{2 + \cos n}{3 - \sin \sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**Exercice6** : Soit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie

$$\text{par : } u_n = (-1)^n \sin \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée

**Exercice7** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente

$$\text{définie par : } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Montrer par récurrence que  $u_n \leq u_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Exercice8** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

**Exercice9** : soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Exercice 10:** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente

$$\text{définie par : } \begin{cases} u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$$

1) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est minorée par 2

2) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée par 4

3) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Exercice 11:** Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répondit-il, donne-moi seulement 1 centime le 1<sup>er</sup> juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne moi la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

**Exercice 12 :** calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

**Exercice 13 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2; u_1 = \frac{4}{9} \end{cases}$$

et on considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$v_n = u_n - \frac{1}{3^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer que  $u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) écrire  $v_n$  et  $u_n$  en fonction de n

c) calculer la somme :  $s_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

**Exercice 14 :** soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 \in ]-1; 0[ \end{cases}$$

1) Montrer que  $-1 < u_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement croissante

3) Montrer que  $u_{n+1} \geq \frac{u_n}{\sqrt{u_n + 2}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Et en déduire que :  $u_n \geq \frac{u_0}{(\sqrt{u_0 + 2})^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**Exercice 15 :** Utiliser les Opération sur les limites des suites pour calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n}} - \frac{2}{3n} + \frac{5}{n^2} - 1 \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right)$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n \quad 4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 2n$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 - 2n - 5 \quad 6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 3n - 7}{3n^2 + 5}$$

$$7) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 3n + 2} - n$$

**Exercice 16 :** calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^3 - 5n^2 + 3n - 1 \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} 6n^3 - 2n^5 + 7n - 9$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n - 3}{3n + 5} \quad 4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 - 9}{3n + 1} \quad 5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n^2 + 1}{14n^3 - 5n + 9}$$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^5 + 3n - 4}$$

**Exercice 17 :** calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n} \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} - n$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^5 + 2n^3 - n + 4}$$

**Exercice 18 :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suites tel que :

$$v_n = 2(-1)^n + \frac{4}{3}n^2 + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) montrer que :  $v_n \geq \frac{4}{3}n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) en déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**Exercice 19 :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suites tel que :

$$v_n = 3n + 5 \sin n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**Exercice 20 :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suites tel que :

$$v_n = -4n + 3 \cos n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**Exercice 21 :** soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice 22 :** calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n}$

**Exercice 23 :** soit  $(v_n)_{n \geq 4}$  la suite récurrente

$$\text{définie par : } \begin{cases} v_{n+1} = \frac{5v_n}{n+1} \\ v_4 = 10 \end{cases}$$

montrer que La suite  $((v_n)_{n \geq 4})$  est convergente.

**Exercice 24 :** calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n+2} \quad 2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 2 \sin \frac{1}{n}}{4n + \sin \frac{1}{n}}$$

**Exercice 25 :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suites tel que :

$$v_{n+1} = v_n + n^4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad v_0 = 1$$

montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

**Exercice 26 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f(x) = x^2 + x + 1$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante

2. Montrer que la suite  $(u_n)$  est non majorée

(Par absurde) .

3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercice 27 :** Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suites tel que :

$$v_n = \sqrt{\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

**Exercice 28 :** calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

**Exercice 29 :** calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (-5)^n$$

**Exercice 30 :** calculer les limites suivantes

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,7)^n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2)^n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (4)^{-n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$$

**Exercice 31 :** Soit la fonction  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de  $C_f$  avec la droite  $(\Delta) y = x$

2. Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$  et

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite  $(u_n)$

b) Conjecturer la monotonie de la suite  $(u_n)$  et sa limite potentielle.

3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante majorée par 2.

4. Soit la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n + \alpha$

a) Déterminer  $\alpha$  pour que la suite  $(v_n)$  soit géométrique.

b) Déterminer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercice 32 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

1) Etudier les variations de  $f$  sur  $I = [0,1]$

et Montrer que  $f(I) \subset I$

2) a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \in I = [0,1]$

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercices 33 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$$

1. Etudier les variations de  $f$  et déterminer  $f$  ( $[0,2]$ )

2. a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n \in I = [0,2]$

b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercices 34 :** Soit les suites numériques  $(u_n)$

$$\text{et } (v_n) \text{ définies par : } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\text{et } v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

2. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) (v_n > u_n)$

3. Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et ont la même limite.

**Exercice35 :** Considérons les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par :  $u_0 = a$  et  $v_0 = b$  avec  $0 < a < b < 2a$

$$u_n v_n = ab \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) (0 < u_n < v_n)$

2. En déduire que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante

3. a) Montrer  $(\forall n \in \mathbb{N}) v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

b) En déduire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

**Exercice 36 :** Soit les suites numériques  $(u_n)$  et

$$(v_n) \text{ définies par : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

2) calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$



**Exercice37:** Soit les suites numériques  $(u_n)$  et

$$(v_n) \text{ définies par : } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \text{ et}$$

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

2) calculer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$

**Exercice38:** Soit les suites numériques :  $(x_n)$  et

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ définies par : } x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \text{ et}$$

$$u_n = x_{2n} \text{ et } v_n = x_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et ont la même limite.

**Exercice39 :** Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$

$$\text{et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f(x) = \frac{1}{x+1}$$

1) Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$

2) on pose :  $\alpha_n = u_{2n+1}$  et  $\beta_n = u_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est croissante et que la suite  $(\beta_n)$  est décroissante

b) Montrer que :  $\alpha_n \leq \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

4) Montrer que  $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

5) calculer :  $\lim \alpha_n - \beta_n$

**Exercice40 :** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{12u_n}{9 + u_n^4} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Et en déduire sa convergence et sa limite

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien