

2^{ème} année Sciences Expérimentales
Série : Les Suites Numériques

Exercice 1 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{3^n}$

Exercice 2 :

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{5n^2 + 3}{2n - 7}$

2. $u_n = \frac{7n + (-1)^n}{5n + 3}$

3. $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2 + 3}$

4. $u_n = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{3+n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$

5. $u_n = \frac{3^n + 5^n}{3^n + 4 \times 5^n}$

Exercice 3 :

Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \frac{17}{19}u_n + \frac{18}{19}$ pour tout n de \mathbb{N}

1. Montrer que : $u_n \geq 9$, pour tout n de \mathbb{N}
2. Montrer que (u_n) est décroissante , puis déduire qu'elle est convergente.
3. On pose , $v_n = u_n - 9$ pour tout n de \mathbb{N}
 - a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique
 - b- Calculer v_n en fonction de n
 - c- Déduire u_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 4 :

Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{12 - 8u_n}{4 - 3u_n}$ pour tout n de \mathbb{N}

1. Montrer par récurrence que : $u_n > 2$, pour tout n de \mathbb{N}
2. On pose : $v_n = \frac{u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de \mathbb{N}
 - a- Montrer que (v_n) est une suite arithmétique
 - b- Calculer v_n en fonction de n

c- Déduire u_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 5 :

Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{7u_n + 2}{2u_n + 7}$ pour tout n de \mathbb{N}

1. Montrer par récurrence que : $u_n \geq 1$, pour tout n de \mathbb{N}
2. Montrer que (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente
3. On pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de \mathbb{N}
 - a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique
 - b- Calculer v_n en fonction de n
 - c- Déduire u_n en fonction de n , puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 6 :

Considérons la fonction f définie sur $I = [0,1]$ par : $f(x) = \frac{4x + 3}{3x + 4}$

1. Etudier les variations de f sur $I = [0,1]$
2. Montrer que $f(I) \subset I$
3. Etudier la position de (C_f) avec l'axe $(\Delta): y = x$ sur $I = [0,1]$
4. Considérons la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de \mathbb{N}
 - a- Montrer que $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout n de \mathbb{N}
 - b- Etudier la monotonie de (u_n)
 - c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
