

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $I = [1; 2]$ par : $f(x) = \frac{5x-1}{x+3}$.

① - Etudier les variations de la fonction f .

② - Montrer que : $f(I) \subset I$.

③ - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

a - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq u_n \leq 2$.

b - Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$.

① - Etudier les variations de la fonction f sur \mathbb{R}^+ .

② - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = x$.

③ - Montrer que : $(\forall x \in [0; 1]) : f(x) \geq x$.

④ - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

a - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.

b - Déterminer le sens des variations de la suite (u_n) .

c - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 :

① 1^{ère} partie :

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \right)^2$.

① - Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f , puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② - Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite et interpréter le résultat géométriquement.

③ - a - Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

b - Dresser le tableau de variation de f .

④ - Etudier les positions relatives de (\mathcal{C}_f) et la droite (Δ) d'équation $y = x$.

⑤ - Etudier la concavité de la courbe (\mathcal{C}_f) .

⑥ - Tracer (\mathcal{C}_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

☺ 2^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 4$.

② - Déterminer le sens des variations de la suite (u_n) .

③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

☺ 3^{ème} partie :

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \frac{2}{\sqrt{u_n}}$.

① - Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

② - Calculer v_n puis u_n en fonction de n .

③ - Calculer : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 4 :

☺ 1^{ère} partie :

On considère la fonction numérique f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - x$.

① - a - Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f(x) = x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 1 \right)$.

b - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de la courbe (\mathcal{C}_f) .

② - a - Etudier la dérивabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b - Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$.

c - Dresser le tableau de variations de la fonction f .

③ - a - Montrer que : $(\forall x \in]0; 1[) : f(x) - x = x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2 \right)$.

b - En déduire que : $(\forall x \in]0; 1[) : f(x) > x$.

④ - a - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1; +\infty[$.

b - Montrer que le réel α vérifie : $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$, puis en déduire la valeur de α .

☺ 2^{ème} partie :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{8} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$.

① - Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{8} \leq u_n < 1$.

② - Déterminer le sens des variations de la suite (u_n) .

③ - Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.