Benmoussa Mohammed

Généralité sur les suites avec : $(u_n)_{n\ge n_0}$ est une suite son premier terme est u_{n_0}		
Notions	**Caractères de la suite**	**Définitions et théorèmes**
Majorée minorée bornée	$(u_n)_{n\ge n_0}$ majorée	$\forall n\ge n_0; u_n\le M$ (ou $\forall n\ge n_0; u_n<M$)
	$(u_n)_{n\ge n_0}$ minorée	$\forall n\ge n_0; m\le u_n$ (ou $\forall n\ge n_0; m<u_n$)
	$(u_n)_{n\ge n_0}$ bornée	$(u_n)_{n\ge n_0}$ est majorée et bornée (ou $\exists A\in\mathbb{R}^+; \forall n\ge n_0; \lvert u_n\rvert\le A$ ou $(<A)$
Monotonie	$(u_n)_{n\ge n_0}$ est croissante	$\forall n\ge n_0$; $u_n\le u_{n+1}$
	$(u_n)_{n\ge n_0}$ est décroissante	$\forall n\ge n_0$; $u_n\ge u_{n+1}$
	$(u_n)_{n\ge n_0}$ est constante	$\forall n\ge n_0$; $u_{n+1}=u_n$
	$(u_n)_{n\ge n_0}$ est périodique de période $T\in\mathbb{N}^*$	$\forall n\ge n_0$; $u_{n+T}=u_n$
Suite arithmétique	$(u_n)_{n\ge n_0}$ sa raison $r\ne 0$ et son premier terme u_{n_0}	$\forall n\ge n_0 : u_{n+1}-u_n=r$
	Terme général	$\forall n\ge n_0 : u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$. (c.à.d. u_n en fonction de n)
	Propriété caractéristique	$\forall p\ge n_0$; $\forall q\ge n_0$; $u_q=u_p+(q-p)r$ (avec q et p de $\mathbb{N}$)
	La somme S_n	$S_n=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+....+u_n=\left[\frac{u_n+u_p}{2}\right]\times(n-p+1)$ $S_n=\frac{(\text{ le premier terme }) + (\text{ le dernier terme })}{2}\times(\text{nbre des termes})$
	Moyenne arithmétique	$u_i=a$ et $u_{i+1}=b$ et $u_{i+2}=c$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r on a : $a+b=2c$
Suite géométrique	$(u_n)_{n\ge n_0}$ sa raison $q\ne 0$ et son 1er terme u_{n_0}	$\forall n\ge n_0 : u_{n+1}=q\times u_n$
	Terme général	$\forall n\ge n_0 : u_n=u_{n_0}\times q^{(n-n_0)}$ (c.à.d. u_n en fonction de n)
	Propriété caractéristique	$\forall p\ge n_0$; $\forall q\ge n_0 : u_q=u_p\times q^{q-p}$ (avec q et p de $\mathbb{N}$)
	La somme S_n	$q\ne 1$: $S=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+....+u_n=\left[\frac{q^{(n-p+1)}-1}{q-1}\right]\times u_p$ $q=1$: $S=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p(n-p+1)$
	Moyenne géométrique	$u_i=a$ et $u_{i+1}=b$ et $u_{i+2}=c$ trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q on a : $a\times c=b^2$

Limite d'une suite	
Limite Définition	On dit que la limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est le réel ℓ si pour tout intervalle ouvert I de centre ℓ il existe un rang p tel que $\forall n\geq p$ on a $u_n\in I$ on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.
propriétés	• Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a une limite alors cette limite est unique . • $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^i}=0$ avec $\left(i\in\mathbb{N}^*\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$ • $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-\ell)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$. • $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}n^i=+\infty$ avec $\left(i\in\mathbb{N}^*\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$. • Les propriétés des limites des fonctions restent valable pour les limites des suites . ❖ Exemple 1 :si ($\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell'$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n+v_n=\ell+\ell'$. ❖ Exemple 1 :si ($\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\times v_n=-\infty$
convergence d'une suite	Si la limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est finie (c.à.d. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$) on dit que la suite est convergente
	Si la limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est infinie (c.à.d. $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\pm\infty$) ou $(u_n)_{n\geq n_0}$ n'a pas de limite on dit que la suite est divergente
	❖ Toute suite croissante et majorée est convergente . (càd la limite de la suite est fini) ❖ Toute suite décroissante et minorée est convergente .
Les critères de convergence	$(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ trois suites tel que $\forall n\in\mathbb{N}$; $n\geq p$ p entier donné on a : ❖ Critère 1 : si ($v_n\leq u_n\leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=\ell$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$. $(\ell\in\mathbb{R})$ ❖ Critère 2 : si ($v_n\geq\alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=+\infty$. (avec $\alpha>0$) ❖ Critère 3 : si ($v_n\leq\alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$. (avec $\alpha>0$) ❖ Critère 4 : si ($\lvert v_n-\ell\rvert\leq\alpha.u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$) alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$. (avec $\alpha>0$)

Limites des suites particulières		
$u_n=q^n$	❖ Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.	❖ Si $q=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=1$.
	❖ Si $-1<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$.	❖ Si $q\leq-1$ alors q^n n' pas de limite .
$u_n=n^r$	Si $r>0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}n^r=+\infty$.	Si $r<0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}n^r=0$.
$v_n=f(u_n)$	f est une fonction continue en ℓ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ $(\ell\in\mathbb{R})$ alors : la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie par $v_n=f(u_n)$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=f(\ell)$.	
$u_{n+1}=f(u_n)$	f est une fonction et $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$. si on a : • f est une fonction continue sur un intervalle I . • $f(I)\subset I$. • $u_{n_0}\in I$. • La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente vers ℓ . $(\ell\in\mathbb{R})$. Alors ℓ est solution de l'équation : $x\in I/f(x)=x$ (c.à.d. ℓ vérifie $\ell=f(\ell)$)	