

Les suites numériques

Prof. Smail BOUGUERCH

La suite arithmétique – la suite géométrique:

	D'une suite arithmétique	D'une suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$ (r est la raison)	$u_{n+1} = q \times u_n$ (q est la raison)
Le terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$ ($p \leq n$)	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ ($p \leq n$)
La somme de termes successifs	$u_p + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right)$	$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$
a et b et c trois termes successifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

La suite majorée – la suite minorée:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- $(\forall n \in I); u_n \leq M \Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ est majorée par M
- $(\forall n \in I); u_n \geq m \Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ est minorée par m
- $(u_n)_{n \in I}$ est bornée $\Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ majorée et minorée

La monotonie d'une suite numérique:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- $(\forall n \in I); u_{n+1} \leq u_n$ ($u_{n+1} < u_n$) $\Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ est décroissante (strictement décroissante)
- $(\forall n \in I); u_{n+1} \geq u_n$ ($u_{n+1} > u_n$) $\Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ est croissante (strictement croissante)
- $(\forall n \in I); u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow (u_n)_{n \in I}$ est constante

Remarque:

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique dont le premier terme est : u_p

- Si $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante, alors : $(\forall n \in I); u_n \leq u_p$
- Si $(u_n)_{n \in I}$ est croissante, alors : $(\forall n \in I); u_n \geq u_p$

Limite d'une suite:

Limite de la suite (n^α) **avec** $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:

$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$

Limite de la suite géométrique (q^n) **avec** $q \in \mathbb{R}$:

$q > 1$	$q = 1$	$-1 < q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	Pas de limite

Critères de convergence:

- Toute suite croissante et majorée est une suite convergente
- Toute suite décroissante et minorée est une suite convergente

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = l \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} w_n = l \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\left. \begin{array}{l} |u_n - l| \leq v_n \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Suite de type $u_{n+1} = f(u_n)$:

Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_n = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Avec f une fonction continue sur un intervalle I tel que $f(I) \subset I$ et a un élément de I

Si (u_n) converge, alors sa limite l est la solution de l'équation : $f(x) = x$