

Suite arithmétique

1) Une suite arithmétique (u_n) est définie par :

- Un premier terme : u_0 ou u_p
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$ avec r raison de (u_n) .
(ou à partir de p si (u_n) commence à u_p)

2) Une suite est arithmétique de raison r si la différence de deux termes consécutifs est constante et vaut r :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$$

3) L'expression de u_n en fonction de u_0 ou u_p est :

$$u_n = u_0 + n r \quad \text{ou} \quad u_n = u_p + (n - p) r$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs.
On montre par exemple que :

$$u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

Pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Contre-exemple avec 3 termes consécutifs non nuls.
On montre par exemple, pour v_0 et v_1 non nuls, que :

$$\frac{v_2}{v_1} \neq \frac{v_1}{v_0}$$

Somme des termes d'une suite arithmétique

- Somme des n premiers entiers naturels :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

$(n - p + 1)$ correspond aux nbre de termes de u_p à u_n

Exemple : $S = 8 + 13 + 18 + \dots + 2013$

$$S = \underbrace{\left(\frac{2013 - 8}{5} + 1 \right)}_{\text{Nbre de termes}} \times \frac{8 + 2013}{2} = 406\,221$$

Suites

Une suite numérique est une fonction définie de \mathbb{N} (ou partie de \mathbb{N}) dans \mathbb{R} :

$$(u_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u_n$$

- u_n désigne le terme général de la suite.
- (u_n) désigne la suite dans sa globalité.
- La représentation d'une suite est un nuage de points.

Variation d'une suite géométrique

- Si $q > 1$, la suite (q^n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite (q^n) est décroissante.

Pour une suite géométrique quelconque, on prendra en compte le premier terme v_0 .

- Si $v_0 > 0$, (v_n) et (q^n) ont même variation.
- Si $v_0 < 0$, (v_n) et (q^n) ont des variations contraires

⚠ Si $q = 1$ ou $q = 0$, la suite (q^n) est constante.
Si $q < 0$, la suite (q^n) n'est pas monotone.

Suite géométrique

1) Une suite géométrique (v_n) est définie par :

- Un premier terme : v_0 ou v_p
- $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n \times q$ avec q raison de (v_n) .
(ou à partir de p si (v_n) commence à v_p)

2) Une suite est géométrique de raison $q \neq 0$, de termes non nuls, si le quotient de deux termes consécutifs est constant et vaut q :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$$

3) L'expression de v_n en fonction de v_0 ou v_p est :

$$v_n = v_0 \times q^n \quad \text{ou} \quad v_n = v_p \times q^{n-p}$$

Somme des termes d'une suite géométrique $q \neq 1$

- Somme des $(n + 1)$ premières puissance de q :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Généralement pour la somme des premiers termes :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

$(n - p + 1)$ correspond aux nbre de termes de v_p à v_n

Comportement de la suite q^n

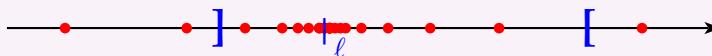
On a les limites suivantes selon les valeurs de q :

- si $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- si $q = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- si $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- si $q \leq -1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas

Limites d'une suite

- **Convergence** d'une suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ signifie que

Tout intervalle ouvert contenant ℓ (aussi petit soit-il) contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit que la suite converge vers ℓ .



Il n'existe qu'un nombre fini de termes à l'extérieur de cet intervalle.

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et la relation pour tout naturel $u_{n+1} = f(u_n)$. (u_n) est monotone et converge vers ℓ .

Algorithme permettant de déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) se trouvent à l'intérieur d'un intervalle ouvert centré en ℓ de rayon r .

Variables : N entier, u réel

Entrées et initialisation

 | $u_0 \rightarrow u$, $0 \rightarrow N$

Traitement

 | tant que $|u - \ell| \geq r$

 | faire

 | $f(u) \rightarrow u$

 | $N + 1 \rightarrow N$

 | fin

Sorties : Afficher N

- **Divergence** d'une suite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ signifie que

Tout intervalle $]A ; +\infty[$ contient tout les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. On dit que la suite diverge vers $+\infty$.

Les termes de la suite (u_n) arrivent à dépasser A , aussi grand soit-il.

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et la relation pour tout naturel $u_{n+1} = f(u_n)$.

(u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.

Algorithme permettant de déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite (u_n) sont supérieur à un réel A .

Variables : N entier, u réel

Entrées et initialisation

 | $u_0 \rightarrow u$, $0 \rightarrow N$

Traitement

 | tant que $u \leq A$ faire

 | faire

 | $f(u) \rightarrow u$

 | fin

Sorties : Afficher N

Remarque : une suite peut diverger sans avoir de limite.

La suite $[(-2)^n]$ diverge et n'admet pas de limite.

Étude d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Variation** d'une suite d'une suite : **2 méthodes**

1) On étudie le signe de la quantité : $u_{n+1} - u_n$.

Si la quantité est ≥ 0 (resp. ≤ 0) la suite est croissante (resp. décroissante).

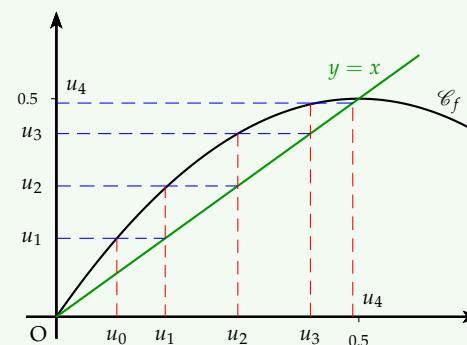
2) Si tous les termes sont > 0 , on compare la quantité $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Si la quantité est ≥ 1 (resp. ≤ 1), la suite est croissante (resp. décroissante).

- **Représentation** des premiers termes de la suite :

Méthode : On trace la courbe de la fonction associée \mathcal{C}_f et la droite Δ d'équation $y = x$ pour reporter les termes sur la droite des abscisses.

Exemple : Soit la suite $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.



- Pour trouver la forme explicite de u_n , on passe par une suite auxiliaire, donnée dans l'énoncé, qui est soit arithmétique soit géométrique.

Parmi ces suites, on a les suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = au_n + b$

Exemple : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 4$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2$$

$$= \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -3$

$$v_n = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = v_n + 4 = -3 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$$