1.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..
   a. Déterminer D_f domaine de définition de la fonction f .
   b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat .
   c. Montrer que : la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera son équation .
   d. Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) .
2. ..
   a. Montrer que : $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ pour tout x de D_f .
   b. Montrer que : pour tout x de $]-1,0]$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}\geq 1$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]-1,0]$.
   c. Montrer que : pour tout x de $[1,+\infty[$ on a $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}\leq 1$ puis en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[1,+\infty[$.
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .
   e. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $x_0=0$.
3. Montrer que : l'équation $x\in]-1;+\infty[\ ;\ f(x)=x$ admet une solution unique α tel que : $0<\alpha<1$.
4. Construire la droite (Δ) et la tangente (T) et la courbe (C_f) de f dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5. ..
   a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .
   b. Montrer que : la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J .
   c. Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\alpha)$ en fonction de α .
   d. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .

2.

PREMIERE PARTIE

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{3(x+1)}{\sqrt{2x-1}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..

   a. Déterminer D_f domaine de définition de la fonction f .

   b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x>0}} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat .

   c. Montrer que : la courbe (C_f) admet , au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction

2. ..

   a. Montrer que : $f'(x)=\dfrac{3(x-2)}{(2x-1)\sqrt{2x-1}}$ pour tout x de D_f .

   b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\left]\frac{1}{2},2\right]$ et la fonction f est croissante sur $[2,+\infty[$.

   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .

3.

   a. Montrer que : $\forall x\in D, f''(x)=\dfrac{3(5-x)}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}}$ pour tout x de D_f .

   b. Etudier le signe de la fonction dérivée seconde de f puis déterminer les coordonnées du point I d'inflexion à la courbe (C_f) .

   c. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I .

4. Construire la tangente (T) et la courbe (C_f) de f dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5. On considère g la restriction de la fonction f sur $I=[2,+\infty[$.

   a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

   b. Calculer $g(5)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en 6 puis calculer $(g^{-1})'(6)$

   c. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

DEUXIÈMEE PARTIE

La figure ci-contre représente (C_h) la courbe représentative de la fonction h définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$h(x)=f(x)-x$.

1. .

a. α est un réel tel que : $6,4 < \alpha < 6,5$ (voir la figure) . En déduire graphiquement la seule solution de l'équation $h(x) = 0$ en déduire $f(\alpha)$.

b. Déterminer le signe de $h(x)$ sur $I = [5,\alpha]$.

c. Montrer que : $f([5,\alpha]) \subset [5,\alpha]$ (l'image de l'intervalle I par la fonction f (attention f mais pas h))

2. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

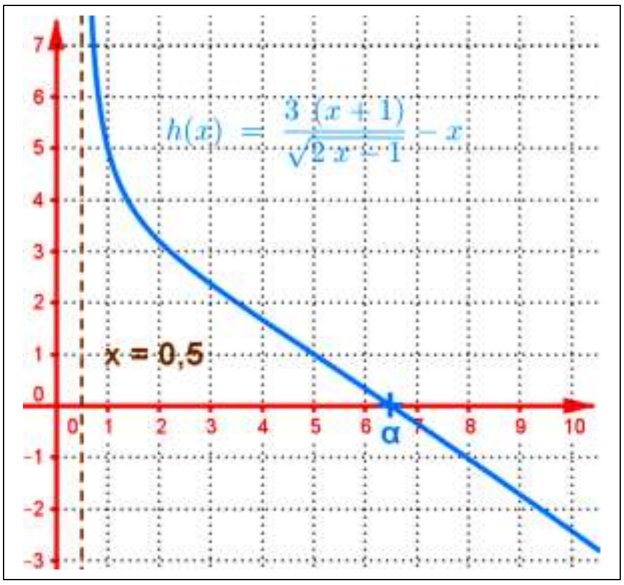
a. Calculer u_1 .

b. Montrer par récurrence que : $5 \leq u_n \leq \alpha$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. montrer que la suite (u_n) est convergente .

d. En déduire que la suite (u_n) est convergente .

e. Calculer la limite de la suite (u_n) .



3.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 2 cm).

1. ..

a. Montrer que f est définie sur $D_f = \mathbb{R}$.

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement les deux résultats .

c. Montrer que : la courbe (C_f) admet , au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction

2. ..

a. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 2x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur D_f .

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3.

a. Montrer que : le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f) .

b. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I .

4. Construire la tangente (T) et la courbe (C_f) de f dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5.

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .

c. Calculer $f(1)$ puis montrer que la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en 0 puis calculer $(f^{-1})'(0)$

4.

On considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-1} & ;\ x<0 \\ f(x)=x+\sqrt{x^2+2x} & ;\ x\geq 0 \end{cases}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 2 cm).

1. ..

a. Montrer que f est définie sur $D_f=\mathbb{R}$.

b. Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0=0$.

2. ..

a. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le deuxième résultat .

b. Vérifier que : $x+\sqrt{x^2+2x}-(2x+1)=\dfrac{-1}{x+1+\sqrt{x^2+2x}}$ pour tout x de $[0,+\infty[$.

c. En déduire la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation $y=2x+1$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

d. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x+1)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

3. ..

a. Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat .

b. Etudier la dérivabilité à gauche de la fonction f au point $x_0=0$.

c. Est-ce que la fonction f est dérivable au point $x_0=0$.

4. ..

a. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, puis vérifier que $f'(x)=1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$ pour tout x de $]0,+\infty[$, en déduire le signe de sur $]0,+\infty[$.

b. Vérifier que : $f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ pour tout x de $]-\infty,0[$, en déduire le signe de sur $]0,+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Construire la courbe $\left(C_f\right)$ de f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

6. On considère g la restriction de la fonction f sur $I=\left[0,+\infty\right[$.

a. Montrer que la restriction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la courbe représentative $\left(C_{g^{-1}}\right)$ de la fonction g^{-1} .

c. Calculer : $g\left(\frac{1}{4}\right)$ puis $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

d. Déterminer la fonction réciproque g^{-1} .

e. Sans calculer la limite $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g^{-1}(x)}{x}$ interpréter géométriquement le résultat on utilise le résultat de la question **3. a** .

5.

On considère la fonction numérique f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & ;\ x\in\left[0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\\ f(1)=\frac{1}{2} \end{cases}$ et

soit $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité de 2 cm).

1. ..

a. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .

b. Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0=1$.

c. Etudier la continuité à droite de la fonction f au point $x_0=0$.

2. ..

a. Montrer que la fonction f est dérivable au point $x_0=1$ et le nombre dérivé est $f'(1)=-\frac{1}{8}$.

b. Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $\left(C_f\right)$ au point $x_0=1$.

c. Etudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0=0$.

d. Est-ce que la fonction f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[\setminus\{1\}$ puis vérifier la fonction dérivée de f sur $\left]0,+\infty\right[\setminus\{1\}$ est $f'(x)=\frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}\left(x-1\right)^2}$.

e. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\left[0,+\infty\right[$.

3. Construire la courbe $\left(C_f\right)$ de f dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4. On considère g la restriction de la fonction f sur $I=\left[0,+\infty\right[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

c. Calculer $g(4)$ puis montrer que la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ puis calculer $(g^{-1})'\left(\frac{1}{3}\right)$.

6.

PREMIERE PARIE

On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=x^3-3x+2$.

1. ..
   a. Calculer : $g(-2)$.
   b. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
2. ..
   a. Calculer : $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
   b. Etudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
   c. Déterminer le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$, on précise les deux valeurs pour lesquelles $g(x)$ s'annule.
   d. Montrer que : $g([3,+\infty[)\subset[3,+\infty[$.

DEUXIÈMEE PARTIE

Soit la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1} , & x\neq-1 \text{ et } x\neq1 \\ f(1)=\dfrac{3}{2} & \end{cases}$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..
   a. Etudier la continuité de la fonction f au point $x_0=1$.
   b. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats
2. ..
   a. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ puis interpréter géométriquement les résultats
   b. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de $-\infty$.
   c. Déterminer la position relative de la droite (D) d'équation $y=x$ et la courbe (C_f)
3. Etudier la dérivabilité de la fonction f au point $x_0=1$ (remarquer que $2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x-1)$

a. Vérifier que : $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

b. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

4. Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm) .

TROISIÈMEE PARIE

Soit a est un nombre réel , on considère la suite (u_n) définie par : $u_0=a$ et $u_{n+1}=g(u_n)-u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. On prend le cas : $a=2$, montrer que : $u_n=2$ pour tout n de $\mathbb{N}$
2. On prend le cas : $a=-2$, montrer que : $u_n=2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$.
3. On prend le cas : $a=0$, montrer que : $u_n=2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\setminus\{0\}$.
4. On prend le cas : $a=3$, Montrer que : $u_n\geq 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

7.

On considère la fonction numérique f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 2 cm).

1.

a. Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus .

c. Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation (Δ) : $y=x$.

2.

a. .. Etudier la dérivabilité à droite de la fonction f au point $x_0=1$ (remarquer que $2x^3-3x^2+1=(x-1)^2(2x-1)$

b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$ puis vérifier que $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

c. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout x $]0,+\infty[$.

d. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$

3. Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (Δ) et la courbe (C_f) . (unité de 2 cm) .

4. On considère g la restriction de la fonction f sur $I=[1,+\infty[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

c. Déterminer : $g^{-1}(x)$ (remarque que $x-2\sqrt{x}+2=(\sqrt{x}-1)^2$)

5. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $u_n>1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente .

d. Calculer la limite de la suite (u_n) .

8.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+3-\sqrt{x^2+5}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..

a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, puis interpréter géométriquement le résultat .

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c. Montrer que : la droite (Δ) d'équation $y=2x+3$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

d. déterminer l'intersection de la courbe (C_f) et l'axe des abscisses.

2. ..

a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis vérifier que $f'(x)=\dfrac{-x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}}$.

b. Montrer que : $\sqrt{x^2+5}-x\geq 0$ puis en déduire les variations de sur $\mathbb{R}$.

c. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Ecrire l'équation réduite de la tangente à (C_f) au point $x_0=-\dfrac{2}{3}$.

e. Déterminer : $f([1,2])$ et $f([2,3])$.

3. ..

a. Etudier le signe de : $f(x)-x$ (remarquer que $f(x)-x=\dfrac{4-x^2}{3+\sqrt{x^2+5}}$).

b. Etudier la position relative de la droite (Δ) et la courbe (C_f).

c. Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (Δ) et la courbe (C_f). (unité de 1 cm) .

4.

a. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $J=]-\infty,3[$

b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} .

c. Montrer que : la fonction réciproque f^{-1} est dérivable en 2.

d. Calculer : $f(2)$ puis $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

5. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante .

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente .

d. Calculer la limite de la suite (u_n) .

6. Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $2 \leq v_n \leq 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (v_n) .est décroissante

c. En déduire que la suite (v_n) est convergente .

d. Calculer la limite de la suite (v_n) .

9.

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -2 + \dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}$.

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm) .

I.

1. Montrer que : $D_f = \left]-1,+\infty\right[$ (D_f ensemble de définition de la fonction f)

a. Calculer : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat .

b. Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c. Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera sa direction .

2.

a. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\left]-1,+\infty\right[$ puis vérifier que $f'(x) = \dfrac{x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\left]-1,+\infty\right[$.

c. dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Ecrire l'équation réduite de la tangente à (C_f) au point $x_0 = -\dfrac{2}{3}$.

3. ..

a. Montrer que : pour tout x de $\left]-1,+\infty\right[$ que $f''(x) = \dfrac{2-x}{4(x+1)^2\sqrt{x+1}}$.

b. En déduire la concavité de la courbe (C_f) et les coordonnées de l'unique point d'inflexion de (C_f) .

4. Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (Δ) et la courbe (C_f). (unité de 1 cm).

5. On considère g la restriction de la fonction f sur $I=[0,+\infty[$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

c. Calculer $g(3)$ puis montrer que : la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\frac{4}{3}$.

d. Calculer : $(g^{-1})'\left(\frac{4}{3}\right)$.

6. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $0\le u_n\le 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente .

d. Calculer la limite de la suite (u_n) .

10.

On considère la fonction numérique f définie sur $D_f=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^4}{x^3+x^2} \ ; \ x\neq -1 \text{ et } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}.$$

et soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité de 1 cm).

1. ..

a. Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats .

b. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)$ puis interpréter géométriquement les résultats .

c. Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

d. Montrer que (C_f) admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ dont on déterminera son équation .

e. Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y=x-1$ sur D_f.

2.

a. Calculer : $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat .

b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$ puis vérifier que $f'(x)=\dfrac{x^5(x+2)}{(x^3+x^2)^2}$.

c. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,-1[\cup]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

d. dresser le tableau de variations de la fonction f sur D_f .

e. Ecrire l'équation réduite de la tangente à (C_f) au point $x_0=0$.

3. ..

a. Vérifier que : $f(x)-(x-1)=\dfrac{x^2}{x^3+x^2}$ puis en déduire la position de la courbe (C_f) et la droite (D) .

b. Etudier l'intersection de la droite (Δ) d'équation : $y=x$ et la courbe (C_f) .

c. Construire dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C_f) . (unité de 1 cm) .

4. On considère g la restriction de la fonction f sur $I=]-1,0]$.

a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J dont le déterminera .

b. Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative $(C_{g^{-1}})$ de la fonction g^{-1} .

c. Calculer $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ puis montrer que : la fonction réciproque g^{-1} est dérivable en $\dfrac{1}{6}$.

d. Calculer : $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{6}\right)$.

5. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=g(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que : $0\le u_n\le 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante .

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente .

d. Calculer la limite de la suite (u_n) .