Dérivation et ses application

0.1 Dérivabilité en un point

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre x_0

Définition 1

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

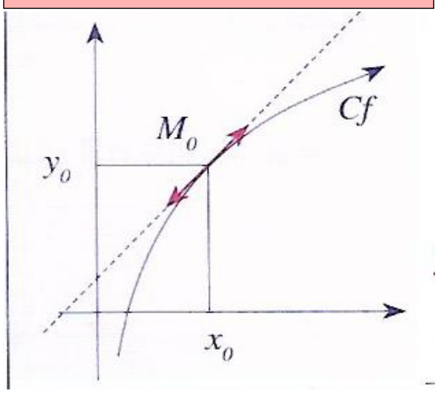
Le nombre $f'(x_0)$ est appelé le nombre dérivée de f en x_0

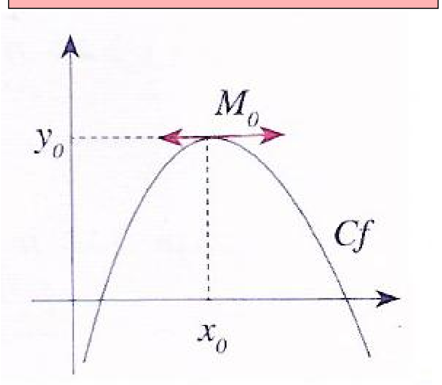
Définition 2

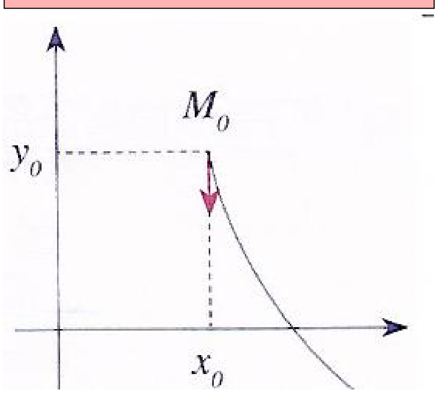
f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

l	0	∞
f est dérivable en x_0	f est dérivable en x_0	f n'est pas dérivable en x_0
Le courbe C_f admit au point $A(x_0;f(x_0))$ une Tangent (T): $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$	Le courbe C_f admit au point $A(x_0;f(x_0))$ Tangent (T) parallèlement à l'axe d'abscisse (Ox): $y = f(x_0)$	Le Courbe C_f admit au point $A(x_0;f(x_0))$ Demi-tangent (T) parallèlement à l'axe d'ordonnée Oy







Propriétés

♣ Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'$ et $l \neq l'$,Alors la fonction f n'est pas dérivable en x_0 et Le courbe C_f admit une point anguleux.

♣ f est dérivable sur l'intervalle $I \Leftrightarrow f$ est dérivable en tous nombres $x_0 \in I$.

♣ f est dérivable au point x_0 $\Rightarrow$ f est continué au point x_0

0.2 Les Opérations sur les fonctions dérivées.

La fonction f	La fonction dérivée f'
a	0
ax	a
x^n	$nx^{n-1}; n \in \mathbb{Q}^*\{-1\}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $x > 0$
$u+v$	$u'+v'$
$u \times v$	$u'v+v'u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$; $v \neq 0$

La fonction f	La fonction dérivée f'
$\sqrt{g}$	$\frac{g'}{2\sqrt{g}}$
g^n	$ng^{n-1} \times g'$
$\sqrt[3]{g}$	$\frac{g'}{3\sqrt[3]{g^2}}$
$g \circ h$	$h' \times g' \circ h$
$\sin g$	$g' \cos g$
$\cos g$	$-g' \sin g$
$\tan g$	$g' \times (1+\tan^2 g)$ avec $g \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

0.3 Dérivée de la fonction $f^{-1}(x)$

Propriété

Si la fonction f est continue et strictement monotonie sur l'intervalle I et f' est la dérivée de f avec $f'(x) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ et on a :

$$\forall x \in f(I) \quad ; \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

0.4 Dérivée de la fonction $x \to \sqrt[n]{x}$

Propriété 1:

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.
La fonction $g : x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, et on a :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) ; \quad g'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$$

Propriété 1:

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $g : x \to \sqrt[n]{u(x)} (n \in \mathbb{N}^*)$ est dérivable sur l'intervalle I; On a : $(\forall x \in I) ; \quad g'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$

0.5 Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée.

Propriété

Si $\forall x \in I, f'(x) > 0$; alors f est strictement croissante sur I.
Si $\forall x \in I, f'(x) < 0$; alors f est strictement décroissante sur I.
Si $\forall x \in I, f'(x) = 0$; alors la fonction f est constante sur I.

Étude des fonction numérique

Dans tout ce qui suit f est une fonction numérique de la variable réelle x, (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé

1 Ensemble de définition

$f = \frac{v}{u}$ est définie si $u \neq 0$
$f = \sqrt{u}$ est définie si $u \geq 0$
$f = \frac{v}{\sqrt{u}}$ est définie si $u > 0$

Remarque

On utilise le tableau de signe dans les cas suivante:
$u(x) = ax^2 + bx + c$
$u(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
$u(x) = (ax+b)(cx+d)$

2 Parité d'une fonction

Pour tout $x \in D_f$ Alors $((-x) \in D_f)$
Si $f(-x) = f(x)$ alors la fonction f est paire.
Si $f(-x) = -f(x)$ alors la fonction f est impaire.

3 Axe de symétrique - Centre de symétrique

Pour tout $x \in D_f$ Alors $((2a-x) \in D_f)$
Le droite : $x = a$ est l'axe de symétrie de $C_f \Leftrightarrow f(2a-x) = f(x)$
Le point $I(a,b)$ est centre de symétrie de $C_f \Leftrightarrow f(2a-x) + f(x) = 2b$

4 Position relative de C_f et le droite $(\Delta) : y = ax+b$

On étudier la signe de l'expression : $f(x) - (ax+b)$

- Si $f(x) - (ax+b) > 0$ alors la courbe de la fonction f au-dessus de la droite (Δ).
- Si $f(x) - (ax+b) < 0$ alors la courbe de la fonction f au dessous de la droite (Δ).
- Si $f(x) - (ax+b) = 0$ alors la courbe de la fonction f coupe la droite (Δ).

5 Asymptotes et directions asymptotique des branches infinies

5.1 Asymptote horizontale – Asymptote verticale:

Si $\lim_{a} f(x) = \infty$ Alors C_f admet une asymptote vertical d'équation $x = a$ **(Figure 1:)**

si $\lim_{*\infty} f(x) = a$ Alors C_f admet une asymptote horizontal d'équation $y = a$ au voisinage de ∞ **(Figure 2:)**

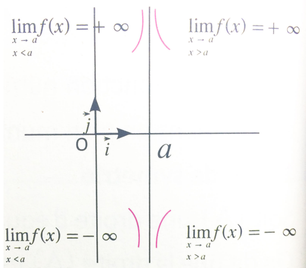


Figure 1:

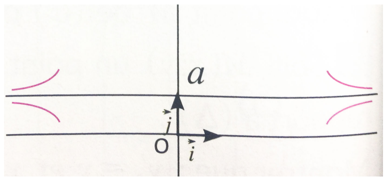


Figure 2:

5.2 Directions asymptotique des branches infinies

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim_{\infty} \frac{f(x)}{x}$

- ∞ : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnés au voisinage de ∞ — **Figure 3:**
- $a \neq 0$: $\lim_{\infty} f(x) - ax$
  - b : (C_f) admet une asymptote oblique d'équation : $y = ax + b$ au voisinage de ∞ — **Figure 4:**
  - ∞ : (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation : $y = ax$ au voisinage de ∞ — **Figure 5:**
- 0 : (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞ — **Figure 6:**

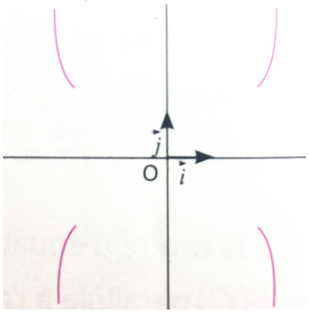


Figure 3:

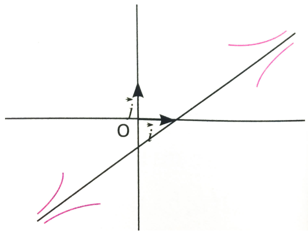


Figure 4:

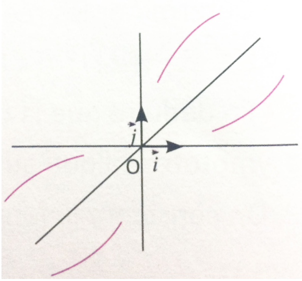


Figure 5:

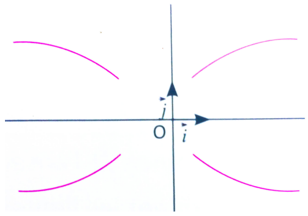


Figure 6:

6 Concavité et points d'inflexion de la courbe d'une fonction f

Propriétés

On Calcule $f''(x)$; Après on étudie son signe.
Les cas suivantes:
Si $\forall x \in I;\ f''(x) \geqslant 0$;Alors la Courbe$C_f$est convexe.
Si $\forall x \in I;\ f''(x) \leqslant 0$;Alors la Courbe C_f est concave.
Le point $I(x_0; f(x_0))$ appelé point d'inflexion de C_f car $f"(x_0) = 0$ et changeant de signe de f'' auteur de point $I(x_0; f(x_0))$

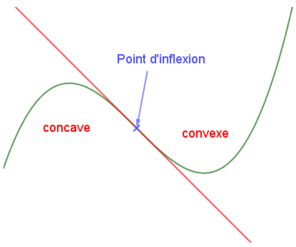


Figure 7:

x		a	
f''	$-$	0	$+$
(C_f)	concave		convexe

x		a	
f''	$+$	0	$-$
(C_f)	convexe		concave

$M(a, f(a))$ est un point d'inflexion

7 L'intersection de C_f avec les axes des repérés .

Le courbe C_f coupe l'axe d'abscisse $\Leftrightarrow f(x)=0$
Le courbe C_f coupe l'axe d'ordonnée $\Leftrightarrow x=0$