LAGDEM Mohamed

Dérivation

Définition :

✓ On dit que f est **dérivable en a** si : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \mathbb{R}$

→ Le nombre ℓ est appelé **le nombre dérivé de f en a** et noté $f'(a)$

Dérivabilité à droit - Dérivabilité à gauche

✓ On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \in \mathbb{R}$

→ ℓ est appelé le nombre dérivé de f à droite en a et noté $f'_d(a)$

✓ On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell' \in \mathbb{R}$

→ ℓ' est appelé le nombre dérivé de f à gauche en a et noté $f'_g(a)$

Propriété

$$\left.\begin{matrix} f \text{ dérivable à droite et à gauche en } a \\ \text{et } \; f'_d(a) = f'_g(a) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow f \text{ est dérivable en } a$$

L'équation de la tangente à (Cf)

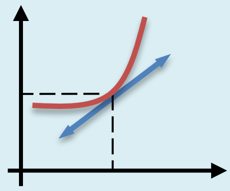
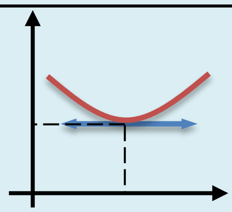
✓ L'équation de la tangente à la courbe (Cf) au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Fonction affine tangente à f

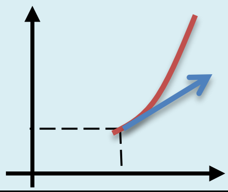
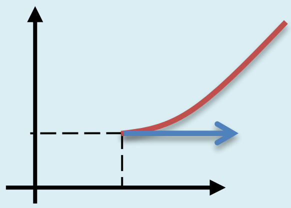
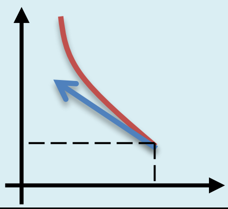
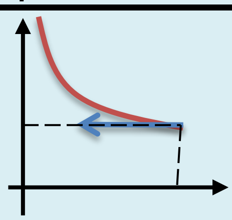
Si f est dérivable en a, la fonction $x \to f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à f en a . Autrement dit : Si $x \simeq a$: $f(x) \simeq f'(a)(x-a) + f(a)$

Interprétation géométrique de la dérivation

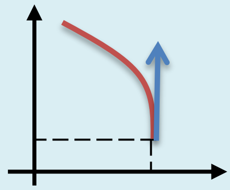
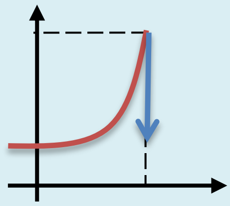
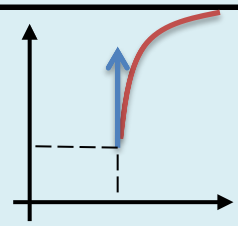
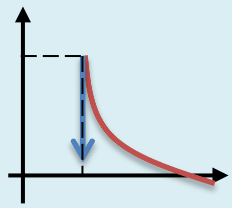
❖ f est dérivable en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemple)
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in IR^*$ $f'(a)=l$	(Cf)admet une tangente au point $A(a,f(a))$ d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$	
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ $f'(a)=0$	(Cf)admet une tangente horizontale au point $A(a,f(a))$	

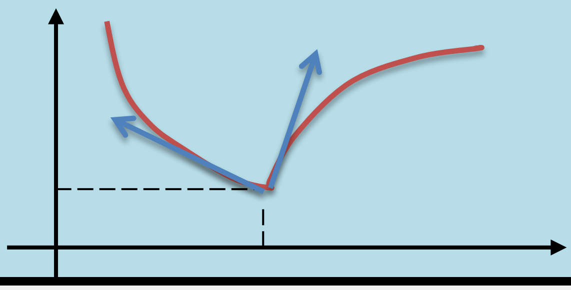
❖ f dérivable à gauche ou à droite en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemple)
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in IR^*$ $f'_d(a)=l$	(Cf)admet une demi tangente à droite au point $A(a,f(a))$ d'équation $\begin{cases}y=f'_d(a)(x-a)+f(a)\\x\geq a\end{cases}$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ $f'_d(a)=0$	(Cf)admet une demi tangente horizontale à droite au point $A(a,f(a))$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=l\in IR^*$ $f'_g(a)=l$	(Cf)admet une demi tangente à gauche au point $A(a,f(a))$ d'équation $\begin{cases}y=f'_d(a)(x-a)+f(a)\\x\leq a\end{cases}$	
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ $f'_g(a)=0$	(Cf)admet une demi tangente horizontale à gauche au point $A(a,f(a))$	

❖ f n'est pas dérivable en a

La limite	Interprétation géométrique	Représentation graphique (en exemples)
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	(Cf)admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le haut	
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	(Cf)admet une demi tangente à droite au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le bas	
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	(Cf)admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le haut	
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	(Cf)admet une demi tangente à gauche au point $A(a, f(a))$ dirigée vers le bas	

❖ Point anguleux :

f est dérivable à droite et à gauche en , mais $f'_d(a) \neq f'_g(a)$	(Cf) admet deux demi tangentes en $A(a, f(a))$ Le point $A(a, f(a))$ est appelé point anguleux 

Dérivabilité des fonctions usuelles

- ✓ toute fonction polynôme est dérivable sur IR.
- ✓ toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition.
- ✓ La fonction $x \to \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. $(n \in IN^*)$
- ✓ Les fonctions $x \to sinx$ et $x \to cosx$ sont dérivables sur IR.
- ✓ La fonction $x \to tanx$ est dérivable en tout point de $IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Opérations sur les fonctions dérivables

Soient f et g deux fonctions **dérivables sur I** et $k \in IR$ et $n \in IN^*$, alors :

-> $f+g$, fg , kf , f^n sont dérivables sur I .

-> Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I .

-> Si $f > 0$ sur I , alors $\sqrt[n]{f}$ est dérivable sur I.

{ →Voir la formulaire de dérivée page suivante }

Dérivée de la composée de deux fonction :

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$, alors la fonction gof est dérivable sur I

$$\forall x \in I \qquad (gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Dérivée de la fonction réciproque :

I) Si f est **dérivable en a et $f'(a) \neq 0$** alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$

Et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

II) Si f est **dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I** alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$

Et $(\forall x \in J)$; $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

La dérivation et la monotonie

$k \in IR$ $n \in IN^*$

f est croissante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
f est décroissante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
f est constante sur I	$\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

Extremums d'une fonction

Si f' **s'annule en a en changeant de signe** alors f admet **un extremum** en a

x		α	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

β Valeur minimale

x		α	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

β valeur maximal

Formulaire de dérivées

Dérivée des fonctions usuelles	Opérations sur les fonction dérivées
$(a)'=0$	$(af)'=af'$
$(x)'=1$	$(f+g)'=f'+g'$
$(ax)'=a$	$(fg)'=f'g+fg'$
$(x^n)'=nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{f}\right)'=\frac{-f'}{f^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}$	$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{f}\right)'=\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)'=\frac{1}{n}\times\frac{1}{\sqrt[n]{x}^{n-1}}$	$\left(f^n\right)'=nf'f^{n-1}$
$\cos'(x)=-\sin(x)$	$\left(\sqrt[n]{f}\right)'=\frac{1}{n}\frac{f'}{\sqrt[n]{f}^{n-1}}$
$\sin'(x)=\cos(x)$	$(fog)'=g'\times f'og$
$\tan'(x)=1+\tan^2(x)$ $=\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'of^{-1}}$

(avec $a \in IR$ et f et g deux fonctions numériques)