Dérivabilité d'une fonction en un point :

On dit que la fonction f *est dérivable en* x_0 *si :* $\lim\limits_{x \mapsto x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l = f'(x_0)$, *avec* $l \in \mathbb{R}$.

Le nombre réel $f'(x_0)$ *s'appelle nombre dérivé de la fonction f au point* x_0.

Interprétation géométrique :

Soit f *une fonction dérivable en* x_0 *donc la courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *admet une tangente* (Δ) *au point* $A(x_0, f(x_0))$ *d'équation :* $(\Delta) : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche :

- *On dit que la fonction* f *est dérivable à droite en* x_0 *si :*

$$\lim_{x \mapsto x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l' = f'_d(x_0) \quad , \text{ avec } l' \in \mathbb{R}.$$

- *On dit que la fonction* f *est dérivable à gauche en* x_0 *si :*

$$\lim_{x \mapsto x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'' = f'_g(x_0) \quad , \text{ avec } l'' \in \mathbb{R}.$$

✱ *Si :* $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ *donc la fonction* f *est dérivable en* x_0.

Interprétation géométrique : *La courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *admet une tangente* (Δ) *au point* $A(x_0; f(x_0))$ *d'équation :* $(\Delta) : y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

✱ *Si :* $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$ *donc la fonction* f *n'est pas dérivable en* x_0.

Interprétation géométrique : *La courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *admet au point* $A(x_0; f(x_0))$ *deux demi-tangente* (T_1) *à droite et* (T_2) *à gauche d'équations :*

$(T_1) : y = f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ *et* $(T_2) : y = f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

✱ *Si :* $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \mapsto x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ *donc la fonction* f *n'est pas dérivable en* x_0.

Interprétation géométrique : *La courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *admet au point* $A(x_0; f(x_0))$ *une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées positives.*

✱ *Si :* $\lim\limits_{x \mapsto x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \mapsto x_0^-} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ *donc la fonction* f *n'est pas dérivable en* x_0.

Interprétation géométrique : *La courbe* $(\mathscr{C}_f)$ *admet au point* $A(x_0; f(x_0))$ *une demi-tangente verticale dirigée vers les ordonnées négatives.*

Opérations sur les fonctions dérivables :

✱ *Soient* f *et* g *deux fonctions dérivables sur un intervalle* I *et* α *un nombre réel.*

Alors : $(f \pm g)' = f' \pm g'$; $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$; $(\alpha f)' = \alpha f'$

et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : (f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$.

✱ *Soient* f *et* g *deux fonctions dérivables sur un intervalle* I *et* $(\forall x \in I) : g(x) \neq 0$.

Alors : $\left(\frac{a}{g}\right)' = -\frac{a \times g'}{g^2}$; $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.

✸Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $(\forall x \in I) : f(x) \succ 0$.

Alors : $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$; $\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\left(\sqrt[n]{f}\right)^{n-1}}$.

✸ Soient f et g deux fonctions dérivables respectivement sur deux intervalles I et J, tel que $f(I) \subset J$. Alors la fonction composée gof est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) : (gof)'(x) = f'(x) \times (g'of)(x).$$

✸ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, tel que $(\forall x \in I) : f'(x) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $f(I) = J$ .De plus, on a pour tout $x \in J$: $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$.

Dérivabilité et variations d'une fonction :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

✸ Si $(\forall x \in I) : f'(x) = 0$,alors f est constante sur I .

✸ Si $(\forall x \in I) : f'(x) \geq 0$,alors f est croissante sur I .

✸ Si $(\forall x \in I) : f'(x) \leq 0$,alors f est décroissante sur I .

Dérivabilité et extremums d'une fonction :

✸ On dit que $f(x_0)$ est un extremum local de f sur un intervalle I, si $f(x_0)$ est un minimum ou maximum local de f en x_0 un intervalle I .

✸ f est un fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un réel de I .

si $f(x_0)$ est un extremum local de f en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Donc la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet au point $A(x_0; f(x_0))$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Concavité et point d'inflexion :

Soit f une fonction numérique, à variable réel deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I . et x_0 un élément de I .

✸ Si $(\forall x \in I) : f''(x) \geq 0$,alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ tourne sa concavité vers les ordonnées positives.

✸ Si $(\forall x \in I) : f''(x) \leq 0$,alors la courbe $(\mathscr{C}_f)$ tourne sa concavité vers les ordonnées négatives.

✸ Si $(\exists x_0 \in I) : f''(x_0) = 0$ en changeant de signe ,alors le point $A(x_0; f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Eléments de symétrie d'une courbe :

✸ Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ si et seulement si :

- ♣ $(\forall x \in D_f)$: $(2a - x) \in D_f$.
- ♣ $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

✸ La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ si et seulement si :

- ♣ $(\forall x \in D_f)$: $(2a - x) \in D_f$.
- ♣ $f(2a - x) = f(x)$.