



Dérivation : Dérivabilité à droite à gauche	<ul style="list-style-type: none"> f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R} \right)$ $\ell = f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0. f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right)$ $\ell_d = f'_d(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0. f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \right)$ $\ell_g = f'_g(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0. f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ 						
Interprétation géométrique du nombre dérivé $f'(x_0)$	<ul style="list-style-type: none"> $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse x_0 équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 est : $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$. Si $f'(x) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisses . La fonction $u(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ s'appelle la fonction affine tangente à la courbe de f au voisinage de x_0 . La fonction $(x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ est une approximation affine de la fonction f au voisinage de x_0 . On écrit $f(x) \approx u(x)$ au voisinage de x_0 . On pose $x = x_0 + h$ on a $f(x_0 + h) \approx u(x_0 + h)$ ou encore $f(x_0 + h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$ 						
Dérivabilité sur un intervalle	<ul style="list-style-type: none"> f est dérivable sur un intervalle ouvert ($I =]a, b[$) \Leftrightarrow pour tout x de I f est dérivable en x f est dérivable sur $[a, b[\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable à droite de a f est dérivable sur $]a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable à gauche de b f est dér. sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable à droite de a et à gauche de b 						
La fonction dérivée	<ul style="list-style-type: none"> La fonction définie par : $\forall x \in I$ on a $x \mapsto f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f sur I on note f'. La fonction dérivée de f' sur I s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2) on note f'' ou $f^{(2)}$. La fonction dérivée de $f^{(n)}$ sur I s'appelle la fonction dérivée ($n+1$)^{ème} (dérivée d'ordre $n+1$) on note $(f^{(n)})'$ ou $f^{(n+1)}$ 						
Opérations sur les fonctions dérivables	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$(f+g)' = f' + g'$</td><td style="padding: 5px;">$(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$</td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$</td><td style="padding: 5px;">$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$; $n \in \mathbb{Z}^*$; $g(x) \neq 0$</td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$; $(x \in I, g(x) \neq 0)$</td><td style="padding: 5px;">$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$; $(x \in I, g(x) \neq 0)$</td></tr> </table>	$(f+g)' = f' + g'$	$(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$; $n \in \mathbb{Z}^*$; $g(x) \neq 0$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$; $(x \in I, g(x) \neq 0)$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$; $(x \in I, g(x) \neq 0)$
$(f+g)' = f' + g'$	$(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$						
$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$	$(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$; $n \in \mathbb{Z}^*$; $g(x) \neq 0$						
$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$; $(x \in I, g(x) \neq 0)$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$; $(x \in I, g(x) \neq 0)$						



	<p>f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a: $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$</p>	
Applications de $(g \circ f)'(x)$	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} ; x \in D_f, \text{ et } f(x) > 0$ $(\tan(ax+b))' = a \times [1 + \tan^2(ax+b)]$ $= a \times \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$ $ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	$(\sin(ax+b))' = a \times \cos(ax+b) ; \text{ sur } \mathbb{R}$ $(\cos(ax+b))' = -a \times \sin(ax+b) ; \text{ sur } \mathbb{R}$
La fonction dérivée de la fonction réciproque	<p>f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction f (avec f est continue et strictement monotone sur I et $f(I) = J$). ($(x_0 \in I) ; x_0 \mapsto f(x_0) = y_0 ; (y_0 \in J)$)</p> <ul style="list-style-type: none"> Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(x_0) = y_0$. On a $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ ou $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. 	
Applications	$g'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} ; n \in \mathbb{N}^*$ $g'(x) = (x^r)' = rx^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$	$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \left(f(x)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$ $([f(x)]^r)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$
Applications de la dérivation		
La fonction dérivée f'	<p>Extremums</p>	<ul style="list-style-type: none"> f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f admet une extremum en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$. f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $f'(a) = 0$ ($a \in I$) et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de f.
	<p>Monotonie de f</p>	<ul style="list-style-type: none"> Si $\forall x \in I : f'(x) > 0$ (même si f' s'annule en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur l'intervalle I. Si $\forall x \in I : f'(x) < 0$ (même si f' s'annule un nombre fini de point) alors f est strictement décroissante sur l'intervalle I. Si $\forall x \in I : f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.
La fonction dérivée f''	<p>Position relative de la tangente et la courbe – la concavité</p>	<p>$\forall x \in I : f''(x) > 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :</p> <ul style="list-style-type: none"> La courbe (C_f) de f est située au dessus des tangentes pour tout point $M(x_0, f(x_0))$ tel que $x_0 \in I$. Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées positives . on note <p>$\forall x \in I : f''(x) < 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :</p>



		<ul style="list-style-type: none"> La courbe (C_f) de f est située au dessous des tangentes pour tout point $M(x_0, f(x_0))$ tel que $x_0 \in I$. Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées négatives . on note ↴)
	Points d'inflexions	<p>Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en $x_0 \in I$ (I intervalle ouvert) et f'' change de signe au voisinage de x_0 alors le point d'abscisse $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion au courbe (C_f) ; dans ce cas la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ coupe (ou traverse) la courbe.</p>
Centre de symétrie de (C_f)		<p>Le point $I(a,b)$ est centre de symétrie à la courbe (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a-x)+f(x)=2b \end{cases}$</p>
Axe de symétrie de (C_f)		<p>La droite d'équation $D: x=a$ est un axe de symétrie à la courbe (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a-x)=f(x) \end{cases}$</p>
Domaine d'étude d'une fonction f	<p>f est paire f est impaire</p> <p>f est périodique</p>	<p>f est une fonction définie sur $D_f = I \cup I'$ (I et I' sont symétriques par rapport à 0 (zéro) avec I contient juste les nombres positifs .</p> <ul style="list-style-type: none"> Si f est paire ou bien impaire il suffit d'étudier la monotonie de f sur I <ul style="list-style-type: none"> Si f est paire : la fonction f a la même monotonie (même variations) sur I et I' Si f est impaire : la monotonie de f sur I et I' sont opposées . donc il suffit d'étudier f sur $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = I$ (D_E est appelé ensemble d'étude de f) <p>f est périodique de période $P=T$ son ensemble d'étude est $D_E = D_f \cap [a, a+T]$ avec $a \in \mathbb{R}$.</p> <ul style="list-style-type: none"> On préfère $a=0$ ou bien $a=-\frac{T}{2}$ On obtient : $D_E = D_f \cap [0, T]$ ou bien : $D_E = D_f \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$



Les branches infinies

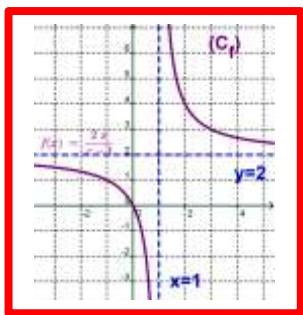
1^{er} cas

Asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

(C_f) admet une asymptote horizontale c'est la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple : asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$

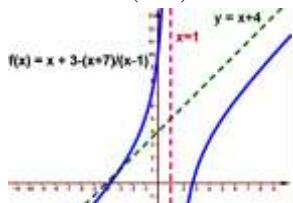


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$

$f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$ Exemple



Rq : position relative de (C_f) et (D) on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$

3^{ème} cas

Asymptote oblique et les trois cas particuliers

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

(C_f) admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = a$

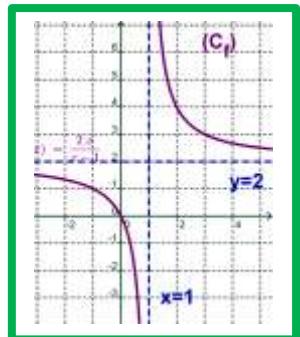
2^{ième} cas

Asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

(C_f) admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = a$

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

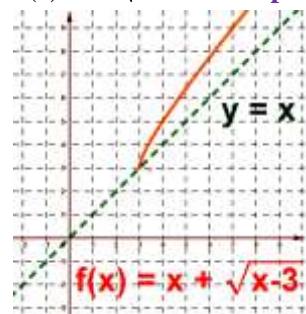
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$$

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

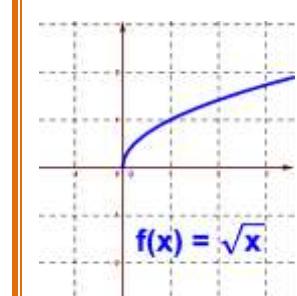
$$f(x) = x + \sqrt{x-3}$$
 Exemple



cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

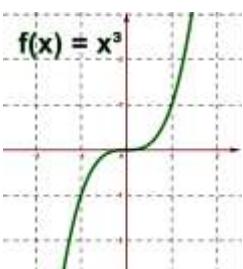
$$f(x) = \sqrt{x}$$
 Exemple



cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnées

$$f(x) = x^3$$
 Exemple



les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)