

## Etude de fonctions

### I) Limite d'une fonction (Rappel)

#### Limite d'une fonction polynôme

- Si  $f$  est une fonction **polynôme** alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- La limite d'un polynôme en  $+\infty$  ou  $-\infty$  est celle de son terme de plus haut degré.

#### Limite d'une fonction rationnelle

- La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ou  $-\infty$  est celle du quotient des termes de plus haut degré.

- Soit  $f$  une fonction rationnelle tel que :  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right)$  forme indéterminée. C'est à dire  $a$  est une racine de  $p(x)$  et  $q(x)$   
donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)p_1(x)}{(x-a)q_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$

#### Limite d'une fonction irrationnelle

- Si  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = a$ , avec  $(a \geq 0)$  alors  $\lim_{x \rightarrow ?} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a}$  .
- Si  $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow ?} \sqrt{f(x)} = +\infty$

#### Opérations sur les limites

Dans ce paragraphe,  $a$  désigne un nombre réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ ,  $L$  et  $M$  sont deux nombres réels.

#### Limite de la somme de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$L$	$L$	$L$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$M$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$L + M$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	<b>F. I</b>

#### Limite du produit de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$L$	$L \neq 0$	$\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$M$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$L \times M$	$\infty$	$\infty$	<b>F. I</b>

Le signe se détermine en respectant la règle des signes

#### Limite du quotient de deux fonctions.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$L$	$L \neq 0$	$\infty$	$\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$M \neq 0$	$0$	$M$	$\infty$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{L}{M}$	$\infty$	$\infty$	<b>F. I</b>	<b>F. I</b>

#### LIMITES USUELLES

Soit  $n \in IN^*$  on a :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$  si  $n$  est impair
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$  si  $n$  est pair
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

#### LIMITES TRIGONOMÉTRIQUES

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

#### Formes indéterminées

$$+\infty + (-\infty) \quad \text{et} \quad 0 \times \infty$$

$$\left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left( \begin{array}{c} \infty \\ \infty \end{array} \right)$$

#### LIMITES ET ORDRE.

Dans ce paragraphe,  $a$  désigne un nombre réel ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**Théorème 1:** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $I$ .

- Si  $(\forall x \in I); f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .
- Si  $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ .

**THÉORÈME DES GENDARMES :** Soient  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $I$  et  $k$  un réel.

Si  $(\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = k$  Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

#### LEMME :

Si  $(\forall x \in I); |f(x) - k| \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  Alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$

## EXERCICES ET PROBLÈMES

### Exercice 1: Calculer les limites

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + 3x^2 - x^3$

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x + 5$

3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 2x + 1)$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5}{x - x^2 + 9}$

5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5}{x^2 - 6x + 9}$

6)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{x^2 - 3x}$

7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{4x^2 + 1}}$

8)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

9)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$

10)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

11)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x + 5} - 3}{x - 1}$

12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} - 2x$

13)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} + 2x$

14)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

15)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 3} - x$

16)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 3} + x$

17)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x - 3)}{x - \sqrt{x + 1} - 1}$

18)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - 3x$

19)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$

20)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + x + 3} + x - 5}{x - 2}$

21)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

22)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

23)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x}$

24)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos^2 x}{x^2 + 2}$

### Exercice 2 :

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $I = ]0 ; 3[$  par:  $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - 3x}$

1) Etudier le signe de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

2) Calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $I$ .

### Exercice 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  par  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 9}$

1) Etudier le signe de  $x^2 - 6x + 9$ .

2) Calculer les limites de  $f$  aux bornes du domaine de définition.

3) Calculer:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$

### Exercice 4 :

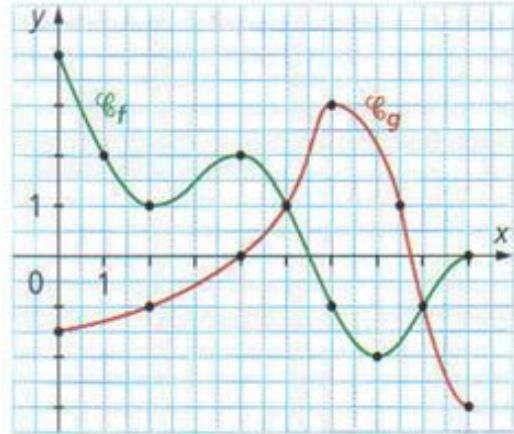
Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$

1) Montrer que,  $(\forall x > 0)$ ;  $\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ .

2) En déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

### Exercice 5 :

Soient  $(C_f)$  et  $(C_g)$  les courbes représentatives respectivement des fonctions  $f$  et  $g$ .



1) Conjecturez

a)  $(D_f)$  et  $(D_g)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

c)  $f([0; 2])$  et  $g([0; 9])$

d) Le signe de  $f(x)$ .

e) Le signe de  $g'(x)$ .

f) Le tableau de variation de  $f$ .

2) Quelles sont les solutions des équations:

$$f(x) = g(x); f(x) = 0; f(x) = -1 \text{ et } g(x) = 1$$

3) Soit  $m$  un réel donné, donnez le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ .

4) Résoudre graphiquement l'inéquation:  $f(x) \leq g(x)$ .

5) Supposons que  $D_f = [-9; 9]$  et  $f$  est une fonction paire.

a) Donnez la valeur de:  $f(-4)$  et  $f(-7)$

b) Complétez la construction de la courbes  $(C_f)$ .

6) Construire la courbe de la fonction  $|f|$  sur l'intervalle  $[0; 9]$ .

**Le succès est la somme de petits efforts, répétés jour après jour.**

Leo Robert Collier

## II) Continuité d'une fonction.

### 1) Continuité en un point- continuité à droite - continuité à gauche

**Définition1:** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .

On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**Attention:** Une fonction ne peut pas être continue en un point qui n'appartient pas au domaine de définition, cela n'a aucun sens.

**Définition2:** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a; a+\alpha[$  avec  $\alpha > 0$ .

On dit que  $f$  est continue à droite en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

**Propriété1:** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .

On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

**Théorème:** Si  $f$  est dérivable en un point  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

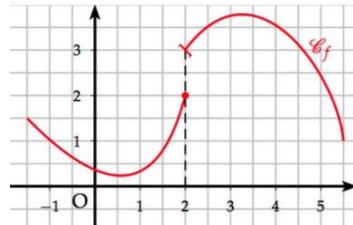
**Attention :** La réciproque est fausse.

### 2) Continuité sur un intervalle

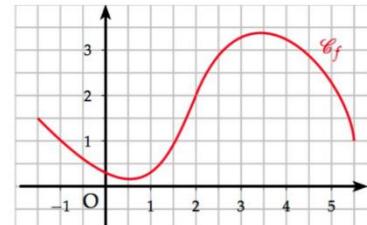
**Définition :** On dit qu'une fonction  $f$  est continue sur un intervalle ouvert si elle continue en tout point de l'intervalle.

**Remarque :** Dire que  $f$  est continue sur  $I$  signifie que l'on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.

La fonction  $f$  est discontinue en 2 car  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \neq f(2)$



La fonction  $f$  est continue en 2 car  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 = f(2)$



**Propriétés :** - Toute fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- Toute fonction rationnelle est continue sur les intervalles où elle est définie.
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction **tangente** est continue sur ses intervalles de définition.
- Toutes les fonctions construites par **somme**, **produit**, **quotient** ou par **composition** des fonctions précédentes sont continues sur leur domaine de définition.

**Théorème:** Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**Attention :** La réciproque est fausse.

**Exemple :** la fonction  $x \mapsto |x|$  est continue, mais n'est pas dérivable en zéro.

### 3) Image d'un intervalle et d'un segment par une fonction continue.

**Propriétés :** L'image d'un intervalle  $I$  par une fonction continue  $f$  est un intervalle  $f(I)$ .

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

**Remarques :**  $f([a; b]) = [m; M]$  tels que  $m$  est le minima et  $M$  est le maxima de  $f$  sur le segment  $[a; b]$ .

- Si l'intervalle  $I$  n'est pas fermé, alors son image est un intervalle qui peut être fermé, ouvert ou semi-ouvert.

## Cas particulier :

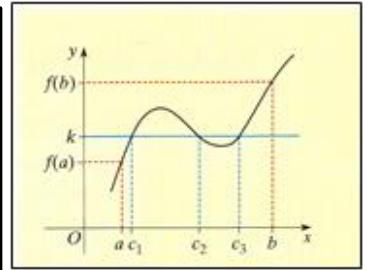
L'image d'un intervalle  $I$  par une fonction  $f$  continue et monotone est un intervalle  $J=f(I)$ .

$f(I)$ est l'intervalle:		
Si $I = \dots$	$f$ est croissante sur $I$	$f$ est décroissante sur $I$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$]a;b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$]-\infty; b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b) \right[$	$\left[ f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$]a; +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$

## 4) Théorème des valeurs intermédiaires.

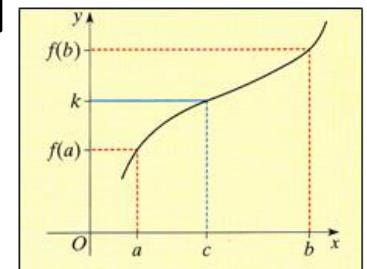
**Théorème :** Soit  $f$  une fonction *continue* sur un intervalle  $[a;b]$ . Pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  de l'intervalle  $[a;b]$  tel que  $f(c)=k$   
**Autrement dit :** l'équation  $f(x)=k$  admet au moins une solution sur l'intervalle  $[a;b]$ .

**Interprétation graphique :**  
La droite ( $D$ ):  $y=k$  coupe la courbe de  $f$  en au moins un point dont l'abscisse est comprise entre  $a$  et  $b$ .



**Corollaire 1 :** Si  $f$  est une fonction *continue et strictement monotone* sur un intervalle  $[a;b]$ , alors, pour tout réel  $k$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , l'équation  $f(x)=k$  admet une solution *unique* dans  $[a;b]$ .

**Interprétation :**  
La droite ( $D$ ):  $y=k$  coupe la courbe de  $f$  en un seul point dont l'abscisse est comprise entre  $a$  et  $b$ .



**Corollaire 2 :** Si  $f$  est une fonction *continue, strictement monotone* sur un intervalle  $[a;b]$  et  $f(a)f(b) < 0$  alors l'équation  $f(x)=0$  admet une solution *unique* dans l'intervalle  $[a;b]$ .

**Interprétation :** la courbe de la fonction  $f$  coupe l'axe des **abscisses** en un seul point dont l'abscisse est comprise entre  $a$  et  $b$ .

## Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

## 5) Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

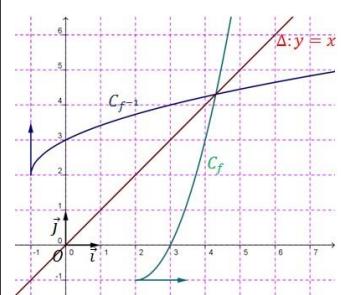
Soient  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  et  $J=f(I)$ .

La fonction **réciproque** de la fonction  $f$  est la fonction notée  $f^{-1}$  définie sur  $J$  à valeurs dans  $I$ , telle que :

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x \quad \text{avec} \quad x \in J \text{ et } y \in I.$$

**Corollaires :** Si  $f$  est *continue et strictement monotone* sur un intervalle  $I$ , alors :

- 1)  $f$  admet une fonction réciproque notée  $f^{-1}$  définie sur  $J=f(I)$  à valeurs dans  $I$
- 2)  $(\forall x \in I); f^{-1}(f(x))=x \quad \text{et} \quad (\forall y \in J); f(f^{-1}(y))=y$ .
- 3) La fonction  $f^{-1}$  est continue et strictement monotone sur  $J=f(I)$ .  
(de même sens de monotonie que  $f$ ).
- 4) Dans un repère orthonormé,  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à la première bissectrice. (la droite d'équation  $y=x$ ).



**Théorème(important):** Si  $f$  une fonction *continue et strictement monotone* sur un intervalle  $I$  et  $k \in f(I)$   
Alors l'équation  $f(x)=k$  admet une *unique solution* dans  $I$ .

## III) Dérivabilité d'une fonction.

### 1) Dérivabilité d'une fonction en un point.

**Définition1 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$ , et  $a$  un élément de  $I$ .

On dit que  $f$  est dérivable en  $a$ , s'il existe un nombre réel  $\ell$  tel que:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$

Le nombre  $\ell$  s'appelle alors le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  et on le note  $f'(a)$ .

**Définition2 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a ; b[$  avec  $b > a$ .

On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $a$ , s'il existe un nombre réel  $\ell$  tel que:  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ .

Le nombre  $\ell$  s'appelle alors le nombre dérivé à droite en  $a$ , et on le note  $f'_d(a)$ .

**Propriété :**  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à droite en  $a$ ,  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  et  $f'_d(a) = f'_g(a)$

*Interprétation géométrique du nombre dérivé.*

- 1) Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $(C_f)$  admet une tangente en  $A(a; f(a))$  d'équation:  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
- 2) Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$  est la fonction affine tangente à  $f$  au point  $a$ .
- 3) Si  $f$  est dérivable à droite en  $a$  alors  $(C_f)$  admet une demi-tangente en  $A(a; f(a))$  de coefficient directeur  $f'_d(a)$ .
- 4) Si  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  alors  $(C_f)$  admet une demi-tangente en  $A(a; f(a))$  de coefficient directeur  $f'_g(a)$ .
- 5) Si  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et à gauche en  $a$  et  $f'_d(a) \neq f'_g(a)$  alors  $A(a; f(a))$  est un **point anguleux**.
- 6) Si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$  alors  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $a$ , Cependant, la courbe admet au point d'abscisse  $a$  une demi-tangente verticale.

### 2) Dérivabilité sur un intervalle - Fonction dérivée d'une fonction.

**Définition:** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- On dit que  $f$  est dérivable sur  $I$  si elle est dérivable en tout réel  $x$  de  $I$ . Dans ce cas, la fonction qui à tout réel  $x$  de  $I$  associe le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  est appelée **fonction dérivée** de  $f$  et se note  $f'$ .
- On dit que  $f$  est dérivable sur  $[a; b]$  si elle est dérivable sur  $]a; b[$ , dérivable à droite en  $a$  et dérivable à gauche en  $b$ .

**Propriétés :** Toute fonction **polynôme** est dérivable sur **IR**.

- Toute fonction **rationnelle** est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les deux fonctions **sin** et **cos** sont dérивables sur **IR**.
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

**Théorème (Dérivation d'une fonction composée) :**

Si  $u$  est une fonction définie et dérivable sur  $I$  et  $v$  une fonction définie et dérivable sur  $J$  tel que  $u(I) \subset J$ , alors  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(\forall x \in I); (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

**Théorème (Dérivation d'une fonction réciproque) :**

Soit  $f$  une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

- Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $(\forall x \in I); f'(x) \neq 0$ , alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J = f(I)$  et on a :

$$(\forall x \in J); (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{et si} \quad f'(a) \neq 0 \quad \text{alors} \quad (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

- Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , et  $k$  un réel alors :

Opérations sur les fonctions dérivées		Dérivées des fonctions usuelles	
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$	$k$	$0$
$\lambda \cdot u(x)$	$\lambda \cdot u'(x)$	$ax$	$a$
$u(x) \times v(x)$	$u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$	$ax^n$	$n \cdot ax^{n-1}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{u(x)}$	$\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$u \circ v(x)$	$u'(v(x)) \times v'(x)$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt[n]{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)}}$	$\cos x$	$-\sin x$
$(u(x))^n$	$n \cdot (u(x))^{n-1} \times u'(x)$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

### 3) Applications de la fonction dérivée.

- Dérivée et variations. Théorèmes admis

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$ , alors la fonction  $f$  est **croissante** sur  $I$ .
- Si  $(\forall x \in I); f'(x) \leq 0$ , alors la fonction  $f$  est **décroissante** sur  $I$ .
- Si  $(\forall x \in I); f'(x) > 0$ , alors la fonction  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$ .
- Si  $(\forall x \in I); f'(x) < 0$ , alors la fonction  $f$  est **strictement décroissante** sur  $I$ .
- Si  $(\forall x \in I); f'(x) = 0$ , alors la fonction  $f$  est constante sur  $I$ .

**Remarque :**

Si  $(\forall x \in I); f'(x) \geq 0$  et  $f'$  s'annule en des points isolés alors la fonction  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$

- Extremums d'une fonction.

**Propriété :**  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .

- Si  $f'$  s'annule en  $a$  en changeant de signe, alors  $f(a)$  est un extremum local de la fonction  $f$  sur  $I$ .

**Remarque :** Si  $f'(a) = 0$  et  $f'$  ne change pas de signe, alors  $A(a; f(a))$  est un **point d'inflexion**.

- Concavité et dérivée seconde

**Définition :** Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ . et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

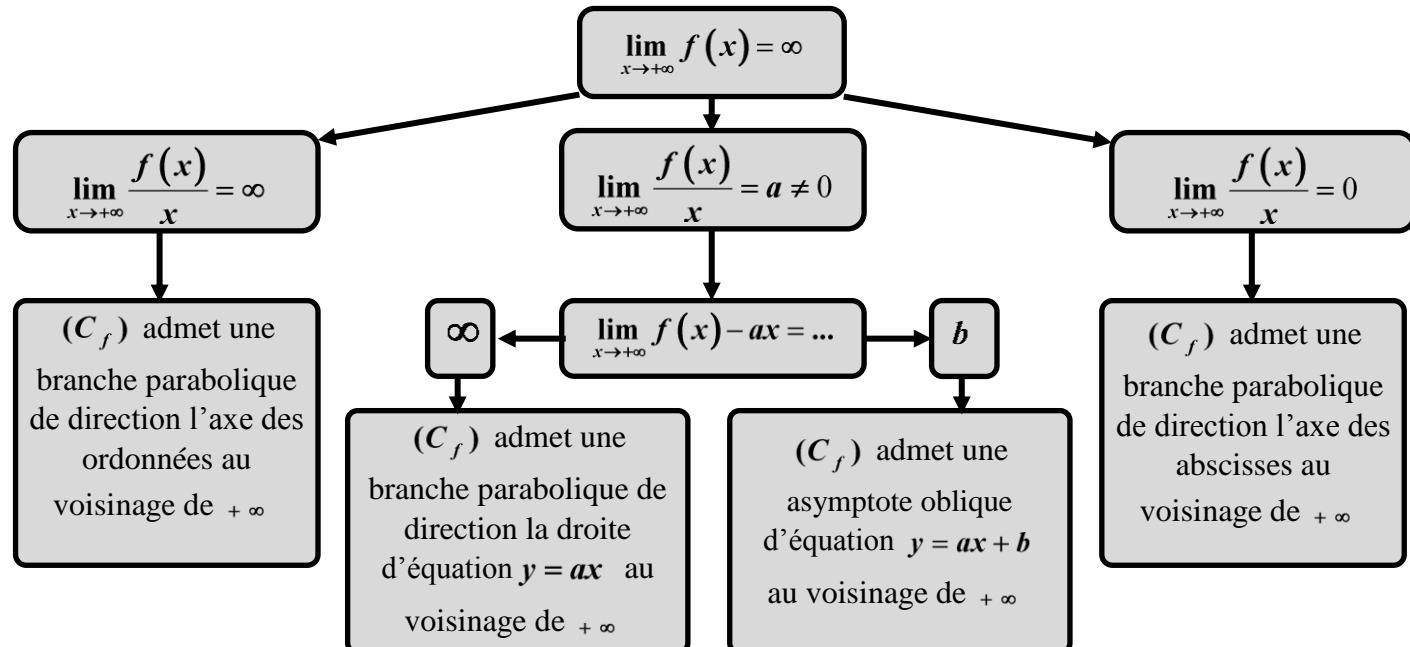
- On dit que la courbe  $(C_f)$  admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives (**convexe**), s'elle est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que la courbe  $(C_f)$  admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives (**concave**), s'elle est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $(\forall x \in I); f''(x) \geq 0$ , alors la courbe  $(C_f)$  admet une concavité dirigée vers les ordonnées positives.
- Si  $(\forall x \in I); f''(x) \leq 0$ , alors la courbe  $(C_f)$  admet une concavité dirigée vers les ordonnées négatives.
- Si  $f''(a) = 0$  et  $f''$  change de signe, alors  $A(a; f(a))$  est un **point d'inflexion**.

## IV) Les branches infinies

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$	La droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à $(C_f)$ en $+\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à $(C_f)$ .
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$	La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $(C_f)$ en $+\infty$



## V) Axe de symétrie - Centre de symétrie

Soit  $f$  une fonction définie sur un ensemble  $D$ .

On dit que la droite  $(\Delta) : x = a$  est un axe de symétrie de  $f$  si pour tout  $x$  de  $D$  on a :

$$(2a - x) \in D \quad \text{et} \quad f(2a - x) = f(x)$$

On dit que le point  $I(a; b)$  est un centre de symétrie de  $f$  si pour tout  $x$  de  $D$  on a :

$$(2a - x) \in D \quad \text{et} \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$$

## VI) Fonction paire - Fonction impaire

On dit que  $f$  est une fonction paire : Si pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :  $-x \in D_f$  et  $f(-x) = f(x)$

**Remarque** : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On dit que  $f$  est une fonction impaire : Si pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :  $-x \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$

**Remarque** : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

## VII) Fonction périodique

On dit que  $f$  est une fonction périodique s'il existe un réel positif  $T$  tel que : pour tout  $x$  de  $D_f$  on a :

$$(x + T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x + T) = f(x)$$

$(T$  est appelé une période de la fonction  $f)$

## VIII) Position relative d'une courbe et d'une droite

Pour étudier la position relative d'une courbe  $f$  et d'une droite  $(\Delta) : y = ax + b$  sur un intervalle  $I$ , on doit étudier le signe de  $f(x) - (ax + b)$  sur  $I$ .

- si  $(\forall x \in I); f(x) - (ax + b) > 0$ , alors  $f$  est strictement au-dessus de  $(\Delta)$  sur  $I$ .
- si  $(\forall x \in I); f(x) - (ax + b) < 0$ , alors  $f$  est strictement au-dessous de  $(\Delta)$  sur  $I$ .
- Les solutions de l'équation  $f(x) - (ax + b) = 0$  sont les abscisses des points d'intersection de  $f$  et  $(\Delta)$ .

## IX) Fonction racine $n^{\text{ième}}$

**Définition :**  $a$  désignant un réel positif et  $n$  un entier naturel non nul.

On appelle racine  $n^{\text{ième}}$  de  $a$  le réel positif noté  $\sqrt[n]{a}$  tel que  $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$ .

**Propriétés :** Pour tous réels  $x$  et  $y$  positifs et pour tous entiers naturels  $m$  et  $n$  on a :

- $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est la fonction **réciproque** de la fonction  $x \mapsto x^n$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[m]{x^m}$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[mn]{x^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$
- $\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} / y \neq 0$

**Remarque.** Les règles de calculs sur les *racines  $n^{\text{ième}}$*  sont les mêmes que celles sur les racines carrées.

## X) Puissance d'exposant rationnel d'un réel strictement positif.

Soient  $x$  un nombre réel strictement positif et  $r$  un nombre rationnel tel que :  $r = \frac{p}{q}$  avec  $(p; q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ .

On remarque que :  $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q = x^{\frac{p \times q}{q}} = x^p$       et       $\left(\sqrt[q]{x^p}\right)^q = x^p$       donc       $\sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$ .

**Propriétés :** Pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs et pour tous nombres rationnels  $m$  et  $n$  on a :

- $x^n \times y^n = (xy)^n$
- $x^m \times x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{mn}$
- $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

**Remarque.** Les règles de calculs sur les exposants rationnels sont les mêmes que celles sur les exposants entiers.