Prof : IDRISSI Abdessamad	Limites et Continuité (série n°1)	$2^{\text{ème}}$ Année Bac

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

① - $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-9x+8}$;; ② - $\lim\limits_{x\mapsto 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-x-20}$;; ③ - $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{5x^2-3x-2}{7x^2-3x-4}$;; ④ - $\lim\limits_{x\mapsto 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{3x^2-8x-3}$.

⑤ - $\lim\limits_{x\mapsto 3}\dfrac{x^3-2x^2-9}{x^4-8x^2-9}$;; ⑥ - $\lim\limits_{x\mapsto 5}\dfrac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$;; ⑦ - $\lim\limits_{x\mapsto 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{5x-4}}{\sqrt{x+5}-3}$.

⑧ - $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^4+x^2+2}}$;; ⑨ - $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\dfrac{-3x^2+2}{2x^2-9x}$;; ⑩ - $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\dfrac{x^3+2x^4}{x^3-x^2+1}$.

⑪ - $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\sqrt{x^2-x}-2x$;; ⑫ - $\lim\limits_{x\mapsto +\infty}\sqrt{x^2+1}-x$;; ⑬ - $\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\sqrt{4x^2+3x-1}+2x-1$.

⑭ - $\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x}$;; ⑮ - $\lim\limits_{x\mapsto -\infty}\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+3x-2}+2x$.

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes :

①- $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 6\\ x\prec 6}}\dfrac{2x+3}{x-6}$;; ② - $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 3\\ x\succ 3}}\dfrac{2x-9}{x^2-2x-3}$;; ③ - $\lim\limits_{x\mapsto 2}\dfrac{x+1}{x^2-4x+4}$;; ④ - $\lim\limits_{x\mapsto 2}\dfrac{x^2+|x-2|-4}{x-2}$.

⑤ - $\lim\limits_{x\mapsto 1^+}\dfrac{2x-3}{x^2-4x+3}$;; ⑥ - $\lim\limits_{x\mapsto 1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$;; ⑦ - $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{1-\cos x}{x\tan x}$;; ⑧ - $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{4x-\pi}$

⑨ - $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$;; ⑩- $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{x-\frac{\pi}{3}}$;; ⑪ - $\lim\limits_{x\mapsto \pi}\dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$;; ⑫ - $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

Exercice 3 :

Etudier la continuité de la fonction f aux points x_0 dans chacun des cas suivants :

① - $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-x^2-x-15}{x-3} & ; \ x\neq 3 \\ f(3)=7 \end{cases}$ et $x_0=3$;; ② - $\begin{cases} f(x)=-2x^2+3 & ; \ x\leq 2 \\ f(x)=x^3+2x-1 & ; \ x\succ 2 \end{cases}$ et $x_0=2$.

③ - $\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1} & ; \ x\leq 3 \\ f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x} & ; \ x\succ 3 \end{cases}$ et $x_0=3$.

Exercice 4 :

①- *Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet au moins une solution dans l'intervalle I .*

a - $x^3-2x^2-1=0$ *et* $I=[2,3]$;; *b* - $x^4-2x-\sqrt{x}+2=1$ *et* $I=]0,1[$.

c - $x^3-3x^2+15x=7$ *et* $I=\mathbb{R}$;; *d* - $x^{17}=x^{11}+1$ *et* $I=[0,+\infty[$.

②- *Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée admet une unique solution dans l'intervalle I .*

a - $x^3-3x^2-5=0$ et $I=[2,4]$;; b - $2x^3+3x+5=1$ et $I=]-1,0[$.

c - $x^3+x^2+x+1=0$ et $I=]-\infty,0]$;; d - $2x^3-5x^2=3$ et $I=\mathbb{R}$

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^3+2x-4$.

①- Etudier les variation de la fonction f .

②- Montrer que la courbe représentatif de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse α tel que $1\prec\alpha\prec 2$.

③ - En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 25×10^{-2}

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{3x^2-2bx+1}{2x^2+ax-a-2} & ;\ x\prec 1 \\ f(x)=\dfrac{-2x^2+3x+3}{x^2+1} & ;\ x\succ 1 \\ f(1)=\dfrac{2+c}{3} \end{cases}$.

Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction f soit continue au point $x_0=1$.

Exercice 7 :

①- Soit f et g deux fonction continues sur $[0;1]$ telles que : $f(0)=g(1)=0$ et $f(1)=g(0)=1$. Montrer que : $(\exists\alpha\in[0;1])$: $f(\alpha)=2017g(\alpha)$.

②- Soit f une fonction continue sur $]0;1[$. Montrer que : $(\exists\alpha\in]0;1[)$: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{1-\alpha}$.

③- Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ telles que : $f(a)\prec ab$ et $b^2\prec f(b)$.
Montrer que : $(\exists\alpha\in]a;b[)$: $f(\alpha)=\alpha b$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $I=[1;+\infty[$ par : $f(x)=(1+x^3)^2$.

①- Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

②- Calculer $(\forall x\in J)$: $f^{-1}(x)$.

Exercice 9 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3}$.

①- Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

②- Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

a - Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b - Calculer $(\forall x\in J)$: $g^{-1}(x)$.

idrissi405@gmail.com