

## Résumé de Cours Limite et continuité

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC BIOF: PC et SVT

# LIMITE ET CONTINUITE

### 1) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT COMPLEMENTS (limite à droite et à gauche et opérations sur les limites)

#### 1) Résultats

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonction polynôme et  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^*$  alors :

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ si } Q(x_0) \neq 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0 \text{ si } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \text{ si } x_0 \geq 0 \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

#### Limite de la somme :

|            |              |           |           |           |           |           |
|------------|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim f$   | $\ell$       | $\ell$    | $\ell$    | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim g$   | $\ell'$      | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f+g$ | $\ell+\ell'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Forme ind |

Ces propriétés sont vraies si  $x$  tend vers  $a^+$  ;  $a^-$  ;  $+\infty$  ou  $-\infty$

#### Limites des produits :

|                   |              |            |            |            |            |           |           |           |           |           |
|-------------------|--------------|------------|------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim f$          | $\ell$       | $\ell > 0$ | $\ell > 0$ | $\ell < 0$ | $\ell < 0$ | $0$       | $0$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim g$          | $\ell'$      | $+\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim f \times g$ | $\ell \ell'$ | $+\infty$  | $-\infty$  | $-\infty$  | $+\infty$  | Forme ind | Forme ind | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

#### Limites des inverses :

|                    |                  |           |           |           |           |
|--------------------|------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\lim f$           | $\ell \neq 0$    | $0^+$     | $0^-$     | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim \frac{1}{f}$ | $\frac{1}{\ell}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$       | $0$       |

#### Limites des quotients

|                    |                      |              |               |              |     |              |
|--------------------|----------------------|--------------|---------------|--------------|-----|--------------|
| $\lim f$           | $\ell$               | $\ell$       | $\ell \neq 0$ | $\pm \infty$ | $0$ | $\pm \infty$ |
| $\lim g$           | $\ell' \neq 0$       | $\pm \infty$ | $0$           | $\ell$       | $0$ | $\pm \infty$ |
| $\lim \frac{f}{g}$ | $\frac{\ell}{\ell'}$ | $0$          | $\pm \infty$  | $\pm \infty$ | $?$ | $?$          |

### 2) Limites à droite et à gauche : RAPPELLES

**Exemple :** (Limites à droite et à gauche)

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Solution :** Déterminons  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\text{Si } -1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{Si } x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

### II) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT :

**1) Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de centre  $a$ . On dit que la fonction  $f$  est continue en  $a$  si elle admet une limite finie en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

#### 2) continuité à droite et à gauche

**Définition :1)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a+r[$  où  $r > 0$

On dit que la fonction  $f$  est continue à droite de  $a$  si elle admet une limite finie à droite en  $a$  et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) :$$

**2)** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a-r; a]$  où  $r > 0$

On dit que la fonction  $f$  est continue à gauche de  $a$  si elle admet une limite finie à gauche en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

#### 3) Prolongement par continuité

**Théorème et définition :** Soit  $f$  une fonction dont l'ensemble de définition est  $D_f$  ;  $a$  un réel tel que  $a \notin D_f$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  (finie)

La fonction  $f$  définie par :  $\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$

Est une fonction continue en  $a$  et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction  $f$  en  $a$

### III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

#### 1) Continuité sur un intervalle

**Définition :** Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition est  $D_f$ , soit  $]a, b[$  un intervalle inclus dans  $D_f$

- 1) On dit que  $f$  est continue sur l'ouvert  $]a, b[$  si elle est continue en tout point de  $]a, b[$
- 2) On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b[$  si elle est continue sur  $]a, b[$  et à droite de  $a$
- 3) On dit que  $f$  est continue sur  $]a, b]$  si elle est continue sur  $]a, b[$ , à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

#### 2) Opérations sur les fonctions continues

**Propriétés :** 1) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  alors : a)  $f + g$  b)  $f \times g$  c)  $|f|$

Sont des fonctions continues en  $a$

2) Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  et  $g(a) \neq 0$  alors

a)  $\frac{1}{g}$  b)  $\frac{f}{g}$  sont des fonctions continues en  $a$ .

3) Si  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $f(a) \geq 0$  alors :  $\sqrt{f}$  est continue en  $a$

**Remarque :** La propriété précédente reste vraie soit à droite de  $a$ , à gauche de  $a$  ou sur un intervalle  $I$  (En tenant compte des conditions)

**Propriétés :** 1) Tout fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$

2) Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont continue sur  $\mathbb{R}$

#### 3) Continuité de la composition de deux fonctions.

**Théorème :** Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  tels que :

$f(I) \subset J$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

1) Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $f(x_0)$  alors

$g \circ f$  est continue en  $x_0$ .

2) Si  $f$  est continue  $I$  et  $g$  continue en  $f(I)$  alors  $g \circ f$  est continue  $I$ .

#### 4) Limite de $v \circ u$

**Théorème :** Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $x_0$  telle  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$

si  $v$  est continue en  $l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

### IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

#### 1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

**Théorème : (Admis)**

L'image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue est le segment  $[m, M]$  où :  $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$  et  $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$

**Cas particulier :**

1) Si  $f$  est continue croissante sur  $[a, b]$  alors :

$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

2) Si  $f$  est continue décroissante sur  $[a, b]$  alors :

$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

#### 2) Image d'un intervalle.

##### 2.1 Théorème général

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Remarque :** L'intervalle  $I$  et son image  $f(I)$  par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

##### 2.2 Cas d'une fonction strictement monotone

a)  $f$  continue et strictement croissante sur L'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)] \text{ et } f([a; b]) = \left[ f(a); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right]$$

$$f(]a; b]) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); f(b) \right] \text{ et } f(]a; b]) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right]$$

b)  $f$  continue et strictement décroissante sur L'intervalle  $I$  et  $a \in I$  et  $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(b); f(a)] \text{ et } f([a; b]) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); f(a) \right]$$

$$f(]a; b]) = \left[ f(b); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right] \text{ et } f(]a; b]) = \left[ \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right]$$

### V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE –

#### TVI. 1) Cas général

**Théorème T.V.I :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

#### 2) Cas $f$ strictement monotone.

**Théorème T.V.I (cas  $f$  strictement monotone)**

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

**Remarque :** L'expression " Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$  " peut-être formulée comme :

" Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  l'équation  $f(x) = \lambda$  admet une solution unique dans  $[a, b]$

#### 3) Corolaires

**Corolaire1 (T.V.I) :** Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

**Corolaire2 (T.V.I) :**

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ . Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe un et un seul  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

### VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

**1) Théorème :** Soit  $f$  une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , On a  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie de

$J = f(I)$  vers  $I$ .

donc  $f$  est une bijection de  $I$  vers  $f(I)$

D'où  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de

$J = f(I)$  vers  $I$  et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = y \quad \forall y \in I$$

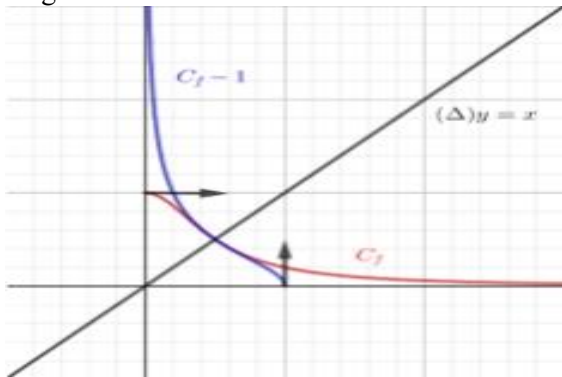
## 2) Propriété de la fonction réciproque

**Propriété 1 :** Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $f^{-1}$  à la même monotonie sur  $J$  que celle de  $f$  sur  $I$ .

**Propriété 2 :** Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $(C_{f^{-1}})$  et  $(C_f)$  sont symétriques par rapport à  $(\Delta) y = x$

**Remarque :**

La symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes...



## 3) La fonction racine n-ème

### 3.1 Définition et règles de calculs

**Propriété et définition :**

Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  ; la fonction :

$f : x \rightarrow x^n$  est une fonction continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  elle admet donc une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque  $f^{-1}$  s'appelle la fonction racine  $n$ -ème et se note  $\sqrt[n]{x}$

**Conséquence de la définition :**

1) La fonction  $\sqrt[n]{x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$

2)  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$

3)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

4) La fonction  $\sqrt[n]{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  strictement croissante.

5)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

6)  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$

$$7) (\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$$

$$8) (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

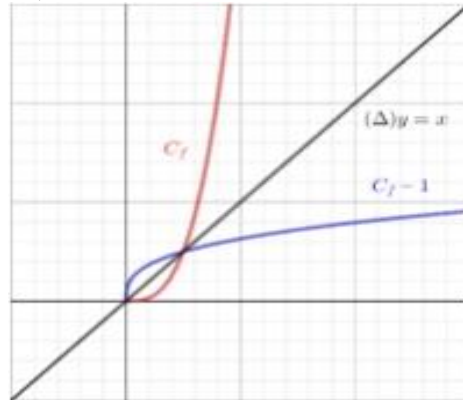
$$9) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N}) (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$11) \text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$$

$$12) \text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \text{ et } l \geq 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$$

13) La courbe de la fonction  $\sqrt[n]{x}$



**Règle de calcul :**

$$1) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$$

$$4) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n \times p]{x^p}$$

(à prouver)

**Remarque :**

$$1) (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[1]{x} = x$$

### 3.2 Résolution de l'équation $x^n = a$

**Exemples :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$1) x^5 = 32 \quad 2) x^7 = -128 \quad 3) x^4 = 3 \quad 4) x^6 = -8$$

**Solutions :** 1)  $x^5 = 32$  donc  $x > 0$

$$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{donc : } S = \{2\}$$

$$2) x^7 = -128 \text{ donc } x < 0$$

$$\text{Donc : } x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Donc : } S = \{-2\}$$

$$3) x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{3}$$

$$\text{Donc : } S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$$

$$4) x^6 = -8$$

$$\text{On a } x^6 \geq 0 \text{ et } -8 < 0 \text{ donc } S = \emptyset$$

**3.3 L'expression conjuguai :** On sait que

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

et  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$  Il en résulte :

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \text{ et } a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

Par suite :  $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x + y}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

**4) Puissance rationnelle :**

**4.1 Puissance entier :**

**Rappelle :** Soit  $x$  un réel et  $n$  un entier naturel non nul on a

$$: x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} \text{ et } (x \neq 0) \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

**4.2 Puissance rationnelle**

**Propriété :** Pour tout réel  $x \geq 0$  et pour tout entier non nul

$$q \text{ on pose : } \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$$

**Définition :** Soit  $x$  un réel positif et  $r$  un rationnel ( $r \in \mathbb{Q}$ ) ;

$$r = \frac{p}{q} \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ on pose :}$$

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$$

**Propriétés :** Soit  $x$  et  $y$  deux réels positifs,  $r$  et  $r'$  des rationnels on a :

|    |                                                  |
|----|--------------------------------------------------|
| 1. | $x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$                   |
| 2. | $x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$      |
| 3. | $x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$    |
| 4. | $x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$ |
| 5. | $(xy)^r = x^r y^r$                               |
| 6. | $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$   |

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

