

الصفحة		
1		
4		
**		
$\alpha$		
الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا		+٠٢٣٤٥٦١٢٣٤٥٦٧
الدورة العادية 2024		+٠٢٣٤٥٦٧٨٩٠١٢٣٤٥٦٧٨٩٠
-الموضوع-		+٠٢٣٤٥٦٧٨٩٠٨٧٦٥٤٣٢٠١٢٣٤٥٦٧٨٩٠٨٧٦٥٤٣٢٠
SSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSSS		NS 22F
3h	مدة الإجاز	الرياضيات
7	المعامل	مسلك علوم الحياة والأرض ومسلك العلوم الفيزيائية (خيار فرنسية)
		المادة
		الشعبة المسلك

# **INSTRUCTIONS GÉNÉRALES**

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
  - ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
  - ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

# **COMPOSANTES DU SUJET**

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude de fonctions numériques et calcul intégral	8 points

- ✓ On désigne par  $\bar{z}$  le conjugué du nombre complexe  $z$  et par  $|z|$  son module
  - ✓  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 (3 points) :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 4$  et  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{1 + u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.25 1) a) Vérifier que  $u_{n+1} = 4 - \frac{6}{1 + u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.5 b) Montrer par récurrence que  $2 \leq u_n \leq 4$ , pour tout entier naturel  $n$

0.25 2) a) Montrer que  $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.5 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire que  $(u_n)$  est convergente.

3) Soit  $(v_n)$  la suite numérique définie par  $v_n = \frac{2 - u_n}{1 - u_n}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.5 a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$

0.5 b) Montrer que  $u_n = 1 + \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$ , pour tout entier naturel  $n$

0.5 c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les deux points

$A(-1, 0, -1)$  et  $B(1, 2, -1)$ , le plan  $(P)$  passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}(2, -2, 1)$  et la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(2, -1, 0)$  et de rayon 5

0.25 1) Montrer que  $2x - 2y + z + 3 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(P)$

0.25 2) Déterminer une équation cartésienne de la sphère  $(S)$

0.5 3) a) Vérifier que la distance du point  $\Omega$  au plan  $(P)$  est  $d(\Omega, (P)) = 3$

0.5 b) En déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$  de rayon à déterminer.

0.5 4) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(P)$

0.5 b) Montrer que le point  $H(0, 1, -1)$  est le centre du cercle  $(\Gamma)$

0.5 c) Montrer que la droite  $(\Delta)$  est une médiatrice du segment  $[AB]$

Exercice 3 (4 points) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \bar{u}, \bar{v})$ , on considère les points

$A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = \sqrt{3}(1-i)$  et  $b = 2 + \sqrt{3} + i$

0.5 1) Vérifier que  $|a| = \sqrt{6}$  et que  $\arg(a) = \frac{-\pi}{4}[2\pi]$

0.75 2) a) Montrer que  $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$  puis vérifier que  $\frac{b}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.75 b) En déduire une forme trigonométrique du complexe  $b$ , puis vérifier que  $b^{24}$  est un nombre réel.

3) Soit  $R$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{6}$ , qui transforme chaque point  $M$  du plan d'affixe  $z$  en un point  $M'$  d'affixe  $z'$ . On pose  $R(B) = B'$ ,  $R(A) = A'$  et  $R(A') = A''$

0.5 a) Vérifier que  $z' = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)z$  et que  $\arg(a') \equiv \frac{-\pi}{12}[2\pi]$  où  $a'$  est l'affixe du point  $A'$

0.5 b) Montrer que l'affixe du point  $A''$  est  $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$  et en déduire que les points  $O$ ,  $A''$  et  $B$  sont alignés.

0.5 c) Montrer que  $b'$ , l'affixe du point  $B'$ , vérifie  $b' = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

0.5 d) En déduire que le triangle  $OAB'$  est rectangle en  $O$

Exercice 4 (2 points) :

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

1) Montrer que  $p(A) = \frac{1}{3}$ , où  $A$  est l'événement « les deux boules tirées portent le même numéro »

2) Montrer que  $p(B) = \frac{5}{21}$ , où  $B$  est l'événement « La somme des numéros des boules tirées est 4 »

3) Calculer  $p(A \cap B)$

4) Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Justifier.

**Problème (8 points) :**

**Partie I:** On considère les deux fonctions  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = e^x$  et  $v(x) = x$

- 1) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes  $(C_u)$  et  $(C_v)$  des fonctions  $u$  et  $v$
- 2) Justifier graphiquement que  $e^x - x > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$
- 3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(C_u)$ , la courbe  $(C_v)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$

**Partie II:** On considère la fonction numérique  $f$  définie par  $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$ .

- 1) a) Vérifier que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$

$$\text{b) Montrer que pour tout } x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$$

c) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , puis interpréter géométriquement ce résultat.

- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\text{b) Vérifier que pour tout } x < 0, f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$$

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis déduire que la courbe  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = x$  au voisinage de  $-\infty$

$$\text{3) a) Montrer que pour tout } x \in \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$$

b) Etudier le signe de la fonction dérivée de  $f$ , puis déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique dans l'intervalle  $[-1, 0]$

4) La courbe  $(C_f)$  ci-contre est la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé.

a) Justifier graphiquement que l'équation  $f(x) = x$  admet deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$ .

b) Montrer que :  $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$

5) Soit  $g$  la restriction de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I = [-\infty, 1]$

a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer  $g^{-1}(x)$ )

b) Vérifier que  $g^{-1}$  est dérivable en 1 et calculer  $(g^{-1})'(1)$

