



Exercice N° 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. on considère les points $A(1, -1, -1)$ et $B(0, -2, 1)$ et $C(1, -2, 0)$.

1. ..

a. Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ (0,75)

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0-1 \\ -2+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -2+1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (-1+2)\vec{i} - (-1+0)\vec{j} + (1+0)\vec{k}.$$

Conclusion : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

b. En déduire que $x + y + z + 1 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC) (0,5)

1^{ère} méthode :

- On a le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ou encore $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, 1, 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

- D'où :

$$M(x, y, z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x-1) + 1 \times (y+1) + 1 \times (z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + y + 1 + z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z + 1 = 0$$

Conclusion : $x + y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

2^{ème} méthode :

- Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(1, 1, 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc équation du plan (ABC) est de la forme : $x + y + z + d = 0$.
- Le point $A(1, -1, -1)$ appartient au plan (ABC) donc : $1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times (-1) + d = 0$
d'où $d = 1$.

Conclusion : $x + y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .



2. on considère la sphère (S) d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$.

on vérifie que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(2, -1, 1)$ et pour rayon $R = \sqrt{5}$ (0,75)

$$\begin{aligned} \text{on a : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} - 4 + \underbrace{y^2 + 2y + 1}_{(y+1)^2} - 1 + \underbrace{z^2 - 2z + 1}_{(z-1)^2} - 1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + (z-1)^2 - 1 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 5 = \sqrt{5}^2 \end{aligned}$$

La dernière écriture représente l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(2, -1, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

Conclusion : la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(2, -1, 1)$ et pour rayon $R = \sqrt{5}$.

3. ..

a. Calculer $d(\Omega, (ABC))$ (0,5)

$$\text{On a : } d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 - 1 + 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}. \text{ (on remplace } x + y + z + 1 \text{ (sans écrire } = 0 \text{))}$$

par les coordonnées de $\Omega(2, -1, 1)$

$$\text{Conclusion : } d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3}$$

b. En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ). (0,5)

Puisque le rayon du cercle est $R = \sqrt{5}$ et on a ; $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{3} < \sqrt{5}$ d'où l'intersection du plan (ABC) et la sphère (S) sera un cercle (Γ).

Conclusion : le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ).

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - 2z + 4 = 0$ (0,75)

On calcule : le discriminant Δ :

$$\text{On a : } \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 < 0.$$

D'où l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{2 + i\sqrt{-\Delta}}{2 \times 1} = \frac{2 + i\sqrt{12}}{2} = \frac{2 + i2\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

Conclusion : ensemble des solutions de l'équation est : $S = \{1 + i\sqrt{3} ; 1 - i\sqrt{3}\}$

2. Dans le plan complexe (P) étant rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les

points A, B, C et D d'affixes respectives $a = 1 - i\sqrt{3}$, $b = 2 + 2i$, $c = \sqrt{3} + i$ et $d = -2 + 2\sqrt{3}$.

a. Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$ (0,5)

On a :



- $c - d = \sqrt{3} + i - (-2 + 2\sqrt{3}) = -\sqrt{3} + 2 + i$.
- $a - d = 1 - i\sqrt{3} - (-2 + 2\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3} - i\sqrt{3} = -\sqrt{3} \left(\underbrace{-\sqrt{3} + 2 + i}_{c-d} \right) = -\sqrt{3}(c - d)$
- donc $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$

Conclusion : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$

b. En déduire que : les points A, C et D sont alignés (0,25)
On a :

- Le vecteur $\overrightarrow{DA}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DA}} = a - d$.
- Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DC}} = c - d$

$$a - d = -\sqrt{3}(c - d) \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DA}} = -\sqrt{3}z_{\overrightarrow{DC}} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$$

Par suite les deux vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc les points A et C et D sont alignés .

Conclusion : les points A et C et D sont alignés .

3. Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' ; l'image de M par la rotation R de centre le point O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Vérifier que : $z' = \frac{1}{2}az$ (0,5)

L'écriture complexe de la rotation R est de la forme : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ avec ω est l'affixe du centre de la rotation et θ est l'angle de la rotation .

$$\text{D'où : } z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{-\pi}{3}}$$

(avec $\omega = 0$ est l'affixe du point O centre de la rotation et $\theta = \frac{-\pi}{3}$ est l'angle de la rotation R) .

$$\begin{aligned} z' &= z \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= z \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \\ &= z \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= z \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2}az \quad ; \quad \left(\text{car : } 1 - i\sqrt{3} = a \right) \end{aligned}$$

D'où : L'écriture complexe de la rotation R est $z' = \frac{1}{2}az$

Conclusion : $z' = \frac{1}{2}az$

4. Soit le point H d'affixe h est l'image du point B par la rotation R, et le point P d'affixe p tel que $p = a - c$.

a. Vérifier que : $h = ip$ (0,5)

On a :

$$\begin{aligned} R(B) = H &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}ab \\ &\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(2 + 2i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3})(1 + i) \\ &\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3}) + i(1 - i\sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow h = i \underbrace{(-i - \sqrt{3})}_{-c} + i \underbrace{(1 - i\sqrt{3})}_a \\ &\Leftrightarrow h = i(a - c) \\ &\Leftrightarrow h = ip \end{aligned}$$

D'où : $h = ip$

Conclusion : $h = ip$

b. Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O (0,5)

On a :

$$\begin{aligned} \frac{h-0}{p-0} = \frac{ip}{p} = i &\Rightarrow \begin{cases} \frac{|h-0|}{|p-0|} = |i| \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \arg\left(\frac{h-0}{p-0}\right) [2\pi] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{OH}{OP} = 1 \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \arg(i) [2\pi] ; \left(\frac{h}{p} = i\right) \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} OH = OP \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on a :

- $OH = OP$ d'où le triangle OHP est isocèle en O .
- $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ d'où le triangle OHP est rectangle en O .

Conclusion : le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher:

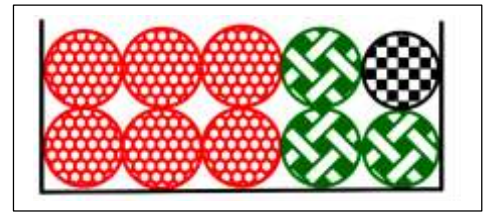
- Trois boules vertes .



- Six boules rouges .
- Une boule noire .

On considère l'expérience suivante : On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne . Soient les événements suivants :

- ❖ A « les trois boules tirées sont vertes » .
- ❖ B « les trois boules tirées sont de même couleur » .
- ❖ C « au moins deux boules de même couleur »



1. Montrer que : $p(A) = \frac{1}{120}$ et $p(B) = \frac{7}{40}$ (2)

- Montrons que : $p(A) = \frac{1}{120}$

➤ On calcule $\text{card}\Omega$: (ou encore le nombre des tirages possibles) .

Tirer simultanément 3 boules parmi 10 boules présente une combinaison de 3 parmi 10 .

d'où le nombre des tirages possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 10 ce nombre est :

$$\text{card}\Omega = C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3} = 120 .$$

donc : $\text{card}\Omega = C_{10}^3 = 120$.

➤ On calcule $\text{card}A$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement A) .

l'événement A « les 3 boules tirées sont vertes »

Tirées 3 boules vertes simultanément parmi 3 boules vertes de l'urne ceci présente une combinaison de 3 parmi 3 .

Donc le nombre des tirages qui réalisent l'événement A est $C_3^3 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3} = 1$ (Remarque $C_n^n = 1$)

donc : $\text{card}A = C_3^3 = 1$.

Conclusion : $p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$.

- Montrons que : $p(B) = \frac{7}{40}$.

➤ On calcule $\text{card}B$: (le nombre des tirages qui réalisent l'événement B) .

l'événement B « les 3 boules tirées sont de même couleur »

ou encore l'événement B est B « les 3 boules tirées sont vertes ou les boules sont rouges » .

✚ les 3 boules tirées simultanément sont vertes parmi 3 boules vertes de l'urne on a : $\text{card}A = C_3^3 = 1$

✚ les 3 boules tirées simultanément sont rouges parmi 6 boules rouges de l'urne on a :

$$C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 .$$

✚ D'où : $\text{card}B = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

donc : $p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120} = \frac{7 \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times 40} = \frac{7}{40}$.

Conclusion : $p(B) = \frac{7}{40}$



D'où : $p(A) = \frac{1}{120}$ et $p(B) = \frac{7}{40}$

2. Calculer $p(C)$ (1)

➤ On calcule **cardC** : (le nombre des tirages qui réalisent l'événement C) .

1^{ère} méthode :

C « au moins deux boules de même couleur »

ou encore C « exactement deux boules de même couleur ou exactement trois boules de même couleur »

L'événement contraire de l'événement C est l'événement $\bar{C}$

$\bar{C}$ « les trois boules de couleurs différentes »

Donc : $\text{card}\bar{C} = C_3^1 \times C_6^1 \times C_1^1 = 3 \times 6 \times 1 = 18$.

Par suite $\text{card}C = \text{card}\Omega - \text{card}\bar{C} = 120 - 18 = 102$.

Donc : $p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{card}\Omega - \text{card}\bar{C}}{C_{10}^3} = \frac{120 - 18}{120} = \frac{102}{120} = \frac{\cancel{6} \times 17}{\cancel{6} \times 20} = \frac{17}{20}$

Conclusion : $p(C) = \frac{17}{20}$

2^{ème} méthode :

ou encore :

C « exactement deux boules de même couleur ou exactement trois boules de même couleur »

▪ On obtient exactement trois boules de même couleur donc l'événement B d'où :

$\text{card}B = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

▪ On obtient exactement deux boules de même couleur ou encore « (deux boules **vertes** et une boule parmi les deux autres couleurs) ou (deux boules **rouges** et une boule parmi les deux autres couleurs) »

✓ Tirer deux boules **vertes** et une boule parmi les deux autres couleur (on a 7 boules)
le nombre des tirages est : $C_3^2 \times C_7^1$.

✓ Tirer deux boules **rouges** et une boule parmi les deux autres couleurs (on a 4 boules)
le nombre des tirages est : $C_6^2 \times C_4^1$.

✓ D'où : le nombre des tirages tel que : On obtient exactement deux boules de même couleur est : $C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 = 3 \times 7 + 15 \times 4 = 81$

▪ Donc : $\text{card}C = C_3^3 + C_6^3 + C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1 = 1 + 20 + 3 \times 7 + 15 \times 4 = 102$.

Par suite on obtient que :

$p(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^3 + C_6^3 + C_3^2 \times C_7^1 + C_6^2 \times C_4^1}{C_{10}^3} = \frac{1 + 20 + 3 \times 7 + 15 \times 4}{120} = \frac{102}{120} = \frac{\cancel{6} \times 17}{\cancel{6} \times 20} = \frac{17}{20}$

Conclusion : $p(C) = \frac{17}{20}$

Problème

Première Partie :



Soit la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$
et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. Calculer : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement (0,5)

On calcule : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.

On a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\ln x = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty.$$

Conclusion : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

On interprète le résultat géométriquement :

Puisque on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ donc la courbe (C) admet une asymptote verticale ou encore c'est la droite d'équation $x = 0$ ou encore l'axe des ordonnées .

2. ..

a. Vérifier que : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$ (0,25)

On a :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln x \times \ln x - \ln x \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x$.

b. En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0,5)

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x = +\infty$.

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x\right) = +\infty$.



Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c. Montrer que : pour tout x de $]0, +\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

..... (0,5)

■ Montrons que : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{\left(\ln \left(\sqrt{x}^2 \right) \right)^2}{\left(\sqrt{x} \right)^2} \\ &= \frac{\left(2 \ln \sqrt{x} \right)^2}{\left(\sqrt{x} \right)^2} ; \left(\ln x^r = r \ln x ; r \in \mathbb{Q} \right) \\ &= \frac{4 \left(\ln \sqrt{x} \right)^2}{\left(\sqrt{x} \right)^2} \\ &= 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$.

■ En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 ; \left(t = \sqrt{x} ; x \rightarrow +\infty ; t \rightarrow +\infty \right) \\ &= 0 ; \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

d. Montrer que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$ (0,75)

On a :



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \frac{(\ln x)^2}{x} = 1.$$

$$\left(\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ d'après la question précédente} \right)$$

$$\text{D'où : } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1 \right) \ln x - x \right) = +\infty \quad (\text{car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty)$$

$$\text{donc } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$$

$$\text{Par suite : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ et } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty.$$

Conclusion : (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]0, 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$

et que pour tout x de $[1, +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$ (0,5)

.. Montrons que : pour tout x de $]0, 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$.

$$\text{On a : } 0 < x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x-1 \leq 0 \\ \ln x \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1) + \ln x \leq 0 \quad (\text{car la somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif})$$

Donc : pour tout x de $]0, 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$

.. Montrons pour tout x de $[1, +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$.

$$\text{On a : } x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-1) + \ln x \geq 0 \quad (\text{car la somme de deux nombres positifs est un nombre positif})$$

Donc : pour tout x de $[1, +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$.

Conclusion : $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de }]0, 1] : (x-1) + \ln x \leq 0 \\ \text{pour tout } x \text{ de } [1, +\infty[: (x-1) + \ln x \geq 0 \end{cases}$

Remarque : on peut utiliser le tableau des signes de $x-1$ et $\ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

b. Montrer que : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$ (1)

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right)' \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \times 2 (\ln x)' \ln x \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln x \\ &= \frac{x - 1 + \ln x}{x} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f (0,5)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \quad \nearrow$ $\frac{3}{2}$	$+\infty$

4. ..

a. Montrer que : $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0, +\infty[$ (0,5)

On a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' \\ &= \left(\frac{x - 1 + \ln x}{x} \right)' \\ &= \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right) \times x - (x - 1 + \ln x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x} + 1 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{2 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x de $]0, +\infty[$ on a : $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$.

b. En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées (0,5)

- Pour déterminer les points d'inflexions d'une fonction on étudie le signe de la fonction f'' dérivée seconde de f .

Le signe de $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$ est le signe de $2 - \ln x$ car $x^2 > 0$ avec $x \in]0, +\infty[$.

On a : $2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2$
 $\Leftrightarrow x \leq e^2$

D'où le signe de f'' est donné par le tableau suivant :

x	0	e^2	$+\infty$
$f''(x)$		+	0 -

Conséquence : la fonction f'' dérivée seconde de f s'annule en $x_0 = e^2$ et change de signe au voisinage de $x_0 = e^2$.

Conclusion : le point $I(e^2, f(e^2)) = I(e^2, \frac{2e^2 + 1}{2})$ est un point d'inflexion à la courbe (C) de f .

5. ..

a. Montrer que : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ et déduire la position relative de (C_f) et (Δ) (0,5)

Montrons que : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 &= \frac{1}{2}((\ln x)^2 - 2\ln x + 1) \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}}_{f(x)} + x - x \\ &= f(x) - x \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x de $]0, +\infty[$: $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$.

En déduire la position relative de (C_f) et (Δ) .

Pour cela on étudier le signe de : $f(x) - x$ ou encore $\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ qui a un signe positif sur $]0, +\infty[$ mais s'annule si $\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$
 $\Leftrightarrow x = e$

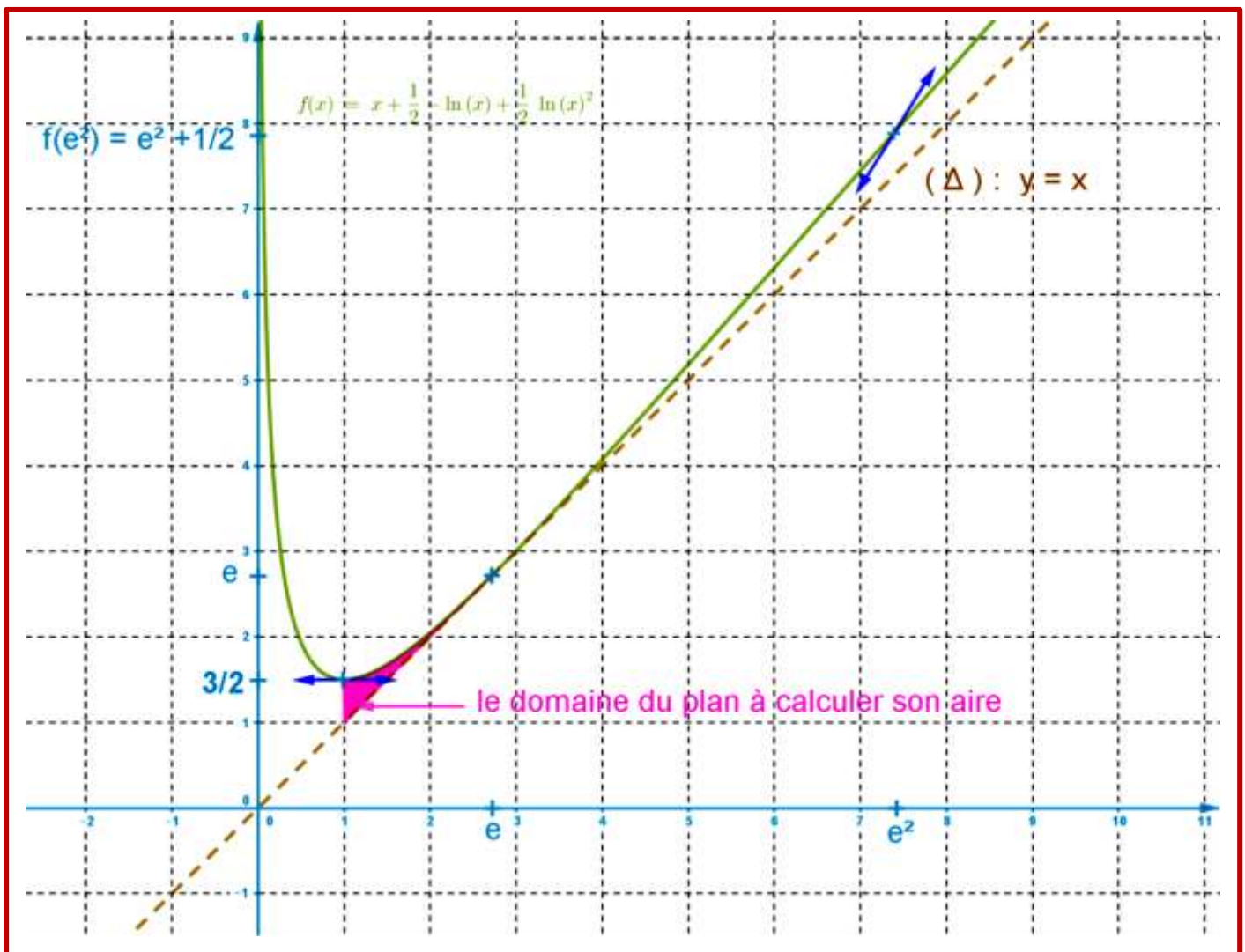
Conclusion :

- La courbe (C) de f est située au dessus de la droite (Δ) sur chacune des intervalles $]0, e[$ et $]e, +\infty[$
- La courbe (C) de f coupe la droite (Δ) au point $A(e, f(e)) = A(e, e)$.

- Remarque : on peut résumer la position relative de (C_f) et (Δ) par le tableau suivant :

x	0	e		$+\infty$
$f(x)-x$ et $(\ln x-1)^2$		+	0	+
position relative de (C_f) et (Δ)		(C) est au dessus de (Δ)		(C) est au dessus de (Δ)
		↓ (C) et (Δ) se coupent au point d' abscisse $x = e$		

- b. Construire (Δ) et (C_f) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (1)



6. ..

- a. Montrer que : $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$. (0,5)

Pour cela on montre que : $H'(x) = h(x)$.

On a : $H'(x) = (x \ln x - x)'$

$$= (x)' \ln x + (x)(\ln x)' - (x)'$$

$$= 1 \times \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} - 1$$

$$= \ln x + 1 - 1$$

$$= \ln x = h(x)$$

D'où : $H'(x) = h(x)$.

Conclusion : la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ (0,75)

On écrit : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e (\ln x) \times (\ln x) dx$

On utilise la disposition suivante :

$$u(x) = \ln x \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \ln x \quad v(x) = x \ln x - x$$

Par suite on obtient:

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \overbrace{\left[\ln x \times (x \ln x - x) \right]_1^e}^{(1)} - \overbrace{\int_1^e \frac{1}{x} \times (x \ln x - x) dx}^{(2)} \\ &= (\ln e \times (e \ln e - e)) - (\ln 1 \times (1 \ln 1 - 1)) - \int_1^e (\ln x - 1) dx \\ &= (1(e \times 1 - e) - 0) - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e 1 dx \\ &= 0 - [x \ln x - x]_1^e + [x]_1^e \quad ; \quad (H'(x) = h(x)) \\ &= -((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1)) + (e - 1) \\ &= 0 - 1 + e - 1 \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C_f) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ (0,5)

La surface demandée à calculer en cm^2 est :

$$\begin{aligned} \left(\int_1^e |f(x) - x| dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| &= \left(\int_1^e (f(x) - x) dx \right) \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \text{ cm}^2 \quad (\text{car } (C) \text{ est au dessus de } (\Delta) \text{ sur } [1, e]) \\ &= \left(\int_1^e \left(\cancel{x} + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 - \cancel{x} \right) dx \right) \times 1 \times 1 \text{ cm}^2 \\ &= \int_1^e \frac{1}{2} dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{e-2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [x]_1^e - [x \ln x - x]_1^e + \frac{1}{2} (e-2) \text{ cm}^2 \\
 &= \frac{1}{2} (e-1) - \underbrace{((e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1))}_{-1} + \frac{1}{2} (e-2) \text{ cm}^2 \\
 &= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{e}{2} - 1 = e - \frac{5}{2} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Conclusion : la surface demandée est $\frac{2e-5}{2} \text{ cm}^2$.

Deuxième Partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. ..

a. Montrer par récurrence que : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (0,5)

On note la relation : $1 \leq u_n \leq e$ par (1)

- On vérifie que la relation (1) est vraie pour $n = 0$.
on a : $1 \leq u_0 = 1 \leq e$ d'où la relation (1) est vraie pour $n = 0$.
- On suppose que la relation (1) est vraie pour n . ou encore $1 \leq u_n \leq e$ est vraie (hypothèse de récurrence) .
- On montre que : la relation (1) est vraie pour $n+1$. (ou encore à démontrer que $1 \leq u_{n+1} \leq e$ d'après hypothèse de récurrence on a : $1 \leq u_n \leq e$ ou encore $u_n \in [1, e]$

Donc : $1 \leq u_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$ (car la fonction est croissante sur $[1, e]$ et $u_n \in [1, e]$) .

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e \quad (f(e) = e \text{ puisque } (C) \text{ coupe } (\Delta) \text{ au point}$$

$$A(e, f(e)) = A(e, e)$$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq e \quad \text{et } f(1) = \frac{3}{2} \text{ voir tableau de variations de } f)$$

D'où : la relation (1) est vraie pour $n+1$.

Conclusion : $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante (0,5)

Pour cela on montre que : $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (ou encore $u_{n+1} - u_n \geq 0$)

Soit n de $\mathbb{N}$, on pose $x = u_n$ et on a $u_n \in [1, e]$ car $1 \leq u_n \leq e$

D'après le résultat de la question I) 5) a -) on a (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $[1, e]$

En déduire que : $f(x) \geq x$ pour tout x de $[1, e]$.

D'où : $x \in [1, e] \Rightarrow f(x) \geq x$

$$\Rightarrow f(u_n) \geq u_n \quad ; (u_n = x \text{ et } 1 \leq u_n \leq e)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n \quad ; (u_{n+1} = f(u_n))$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$$

Donc : $u_{n+1} \geq u_n$

Conclusion : la suite (u_n) est croissante .

Remarque : on peut utiliser une démonstration par récurrence (on montre que pour tout n de $\mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$) .

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente (0,5)

On a :

- la suite (u_n) est croissante .
- la suite (u_n) est majorée (puisque $1 \leq u_n \leq e$) .
- d'après une propriété la suite (u_n) est convergente .(tel que sa limite sera notée par ℓ avec $\ell \in \mathbb{R}$) .

Conclusion : la suite (u_n) est convergente .

2. Calculer la limite de la suite (u_n) (0,75)

- la suite (u_n) est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
- la fonction f est continue sur $I = [1, e]$ et $f(I) \subset I$

(car $f(I) = [f(1), f(e)] = \left[\frac{3}{2}, e\right] \subset I = [1, e]$ (car f est continue et croissante sur $I = [1, e]$ et

$f(e) = e$ et $f(1) = \frac{3}{2}$)).

- On a : $u_0 = 1 \in [1, e]$.
- la suite (u_n) est convergente vers ℓ avec $\ell \in \mathbb{R}$.

donc ℓ est solution de l'équation : $x \in I = [1, e]$; $f(x) = x$ (d'après une propriété)

pour résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1, e]$ on étudier l'intersection de la courbe (C) et la droite (Δ) sur $[1, e]$.

d'après ce qui a précédé (C) coupe (Δ) au point $A(e, f(e)) = A(e, e)$

d'où la solution de l'équation précédente est : $x = e \in [1, e]$ donc $\ell = e$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$