

Exercice 1 : (2014 S1) (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les points $A(0;3;1)$, $B(-1;3;0)$ et $C(0;5;0)$ et

(S) la sphère d'équation: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$

1) a) Montrer que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ et en déduire que A, B et C sont non alignés.

b) Montrer que : $2x - y - 2z + 5 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2; 0; 0)$ et de rayon 3

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).

Exercice 2 : (2014 S1) (3pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

2) Soit u le nombre complexe tel que: $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

a) Montrer que le module de u est $\sqrt{2}$ que $\arg u \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b) En utilisant la forme trigonométrique du nombre u montrer que u^6 est un nombre réel.

On considère, Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ on considère les points A

et B d'affixes respectives $a = 4 - 4i\sqrt{3}$, $b = 8$

4) Soient z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) exprimer z' en fonction de z.

b) Vérifier que B est l'image de A par la rotation R et en déduire que le triangle OAB est équilatéral.

Exercice 3 : (2014 S1) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 13$$

1) Montrer que : $U_n < 14 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Soit (V_n) la suite définie par :

$$V_n = 14 - U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner V_n en fonction de n.

b - En déduire que : $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

puis Calculer $\lim U_n$

c - Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $U_n > 13,99$

Exercice 3 : (2014 S1) (3pts)

Un sac contient neuf jetons, indiscernables au toucher portant les chiffres suivants : 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1

1) On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac

Soit l'événement : A " la somme des deux numéros portés par les deux jetons tirées est égal à 1 "

Montrer que $P(A) = \frac{5}{9}$

2) On considère le jeu suivant : **Said** tire au hasard et en même temps deux jetons du sac et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le chiffre 1

a) Montrer la probabilité de gain de Said est $\frac{1}{6}$

b) Said a joué le jeu précédent trois fois de suite, et à chaque fois il remet les deux jetons tirés dans le sac

Quelle est la probabilité pour que Said gagne exactement deux fois.

Problème : (2014 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$$

1) Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$ et en

déduire que g est croissante sur $]0; +\infty[$

c - Vérifier que $g(1) = 0$ puis en déduire que :

$$g(x) \leq 0 \quad \forall x \in]0, 1] \quad \text{et} \quad g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

II) On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$$

(C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et interpréter le

résultat géométriquement.

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$ (on peut poser

$$t = \sqrt{x} \quad \text{puis montrer que} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

c) Déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

3) a - Montrer que: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x} \quad \forall x \in]0; +\infty[$

puis en déduire que est décroissante sur $]0, 1]$ et

croissante sur $[1; +\infty[$

b - Dresser le tableau des variations de f sur $]0; +\infty[$,

puis en déduire que $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in]0; +\infty[$

4) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion, qu'on ne demande pas de déterminer).

5) On considère les intégrales I et J suivants: $I = \int_1^e (1 + \ln x) dx$ et $J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$

a) Montrer que $H: x \rightarrow x \ln x$ est une fonction primitive de $h: x \rightarrow 1 + \ln x$ sur $]0; +\infty[$ puis en déduire que $I = e$.

b) En utilisant une intégration par parties, montrer $J = 2e - 1$

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$