Année scolaire : 2022 – 2023	Examen national 2012 1ière session	AGOUZAL 2 BPCF

Exercice 1 : **(2012 S1)** (3pts)

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ les points A(1;1;-1), B(0;1;-2) et C(3;2;1) et (S) la sphère d'équation: $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

1) Montrer que (S) est de centre $\Omega(1\,;0\,;1)$ et de rayon $\sqrt{3}$

2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$ et vérifier que : $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

b) Vérifier que : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{2}$ puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon 1.

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que le triplet de coordonnées de H point d'intersection du plan (ABC) et de la droite (Δ) est (2;0;0)

c) En déduire le centre du cercle (Γ)

Exercice 2 : **(2012 S1)** (3pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2-12Z+61=0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A , B et C d'affixes respectives $a=6-5i$, $b=4-2i$, $c=2+i$

a) Calculer $\dfrac{a-c}{b-c}$ et en déduire que A, B et C sont alignés.

On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1+5i$

b – Vérifier que l'affixe du point D image du point C par la translation T est d = 3 + 6i

c – Montrer que $\dfrac{d-c}{b-c}=-1+i$ et que $\dfrac{3\pi}{4}$ est un argument de $-1+i$

d – En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$

Exercice 3 : **(2012 S1)** (3pts)

Un sac contient huit jetons, indiscernables au toucher : un jeton porte le chiffre 0, cinq jetons portent le chiffre 1 Et deux jetons portent les chiffres 2.

On tire simultanément et au hasard trois jetons du sac

On considère les événements suivants:

1) A ″ Obtenir trois jetons portant des chiffres différents deux à deux ″. Montrer que : $P(A)=\dfrac{5}{28}$

2) B ″la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 5 ″. Montrer que : $P(B)=\dfrac{5}{56}$

3) C ″la somme des chiffres portés par les jetons tirées est égal à 4 ″ Montrer que : $P(C)=\dfrac{3}{8}$

Exercice 3 : **(2012 S1)** (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{10}{11}U_n+\frac{12}{11} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0=11$$

1) Montrer que: $U_{n+1}-12=\dfrac{10}{11}(U_n-12)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

2) a) Montrer que : $U_n<12$ $\forall n\in\mathbb{N}$

b) Montrer que (U_n) est strictement croissante

c) En déduire que (U_n) est convergente.

3) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n=U_n-12 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{10}{11}$ puis écrire V_n en fonction de n.

b) Montrer que $U_n=12-\left(\dfrac{10}{11}\right)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ puis calculer $\lim U_n$

Problème : **(2012 S1)** (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$$

1) a) Montrer que x^2-1 et $2x^2\ln x$ ont même signe Sur $]0,1[$ et en déduire que $\forall x\in]0,1]$ $g(x)\le 0$

b) Montrer que x^2-1 et $x^2\ln x$ ont même signe Sur $]1,+\infty[$ et en déduire que $\forall x\in[1,+\infty[$ $g(x)\ge 0$

II) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=(x^2-1)\ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 3 cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et en déduire une interprétation géométrique du résultat.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ puis en déduire une interprétation géométrique du résultat.

2) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ $\forall x\in]0,+\infty[$

Et interpréter géométriquement le résultat $f'(1)=0$

b) En déduire que f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

c) Dresser le tableau des variations de f et montrer que $f(x)\ge 0$ $\forall x\in]0,+\infty[$

3) Construire la courbe (C_f).

4) a – Montrer que $u:x\to\dfrac{x^3}{3}-x$ est une primitive de la fonction $x\to x^2-1$ sur $\mathbb{R}$

b – A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_1^2(x^2-1)\ln x\,dx=\dfrac{2}{9}(1+3\ln 2)$

c – Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = 2.