

Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$\Delta = (4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 > 0$ l'équation admet deux solutions distincts.

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$$

S = {-5;1}

b - Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

$\forall x \in]0, +\infty[$ donc $x > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et $x + 2 > 0$ et $2x > 0$

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2)2x \Leftrightarrow x^2 + 5 = (x + 2)2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 2x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

Donc $x = -5$ et $x = 1$ or $x > 0$ donc $x = 1$

D'où S = {1}

2) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$\forall x \in]0, +\infty[$ donc $x > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et $x + 1 > 0$

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln[x(x + 1)] \geq \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \text{or} \quad x > 0$$

D'où S = [1, +\infty[

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que : $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 1$ donc $U_0 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > 0$ et montrons que

$$U_{n+1} > 0$$

On a $U_n > 0$ donc $8U_n > 0$ et $5 + 8U_n > 5$

$$\text{donc } U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} > 0$$

D'où $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis écrire V_n en fonction de n .

Montrons que $V_{n+1} = 5V_n$?

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{1}{U_{n+1}} + 2 = \frac{1}{\frac{U_n}{5 + 8U_n}} + 2 = \frac{5 + 8U_n}{U_n} + 2 \\ &= \frac{5}{U_n} + \frac{8U_n}{U_n} + 2 = \frac{5}{U_n} + 8 + 2 = 5\left(\frac{1}{U_n} + 2\right) \end{aligned}$$

D'où $V_{n+1} = 5V_n$

(V_n) est une suite géométrique de raison 5 de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0} + 2 = 3$

$$V_n = V_0 \times 5^n$$

D'où $V_n = 3 \times 5^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b - Montrer que $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

en déduire $\lim U_n$

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{U_n} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} = V_n - 2 \\ \Leftrightarrow U_n &= \frac{1}{V_n - 2} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \end{aligned}$$

D'où $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

On a $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim U_n = \lim \frac{1}{3 \times 5^n - 2} = 0 \quad \text{car } \lim 5^n = +\infty$$

Et $5 > 1$

D'où $\lim U_n = 0$

Exercice 3 : (5 pts)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$Z^2 - 18Z + 82 = 0$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 82 = -4 < 0$$

$$= (2i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{18 + 2i}{2} = 9 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 9 - i$$

D'où S = {9 - i; 9 + i}

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 9 + i$, $b = 9 - i$, $c = 11 - i$

a - Montrer que : $\frac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{11-i-9+i}{9+i-9+i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$$

D'où $\frac{c-b}{a-b} = -i$

On a $\frac{c-b}{a-b} = -i$ donc

$$\left| \frac{c-b}{a-b} \right| = |-i| \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{|a-b|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = 1$$

Donc $BC = BA$

$$\frac{c-b}{a-b} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})$$

Donc $\frac{c-b}{a-b} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})$

Or $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \arg \frac{c-b}{a-b} [2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $BC = BA$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

b - Ecrire $4(1-i)$ sous forme trigonométrique

$$|4(1-i)| = 4|1-i| = 4\sqrt{2}$$

$$4(1-i) = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$4(1-i) = 4\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) \right)$$

D'où $4(1-i) = \left[4\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$

c - Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

puis en déduire que $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

$$a = 9 + i, b = 9 - i, c = 11 - i$$

$$(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i) = (2-2i)2 = 4(1-i)$$

D'où $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

$$|(c-a)(c-b)| = |4(1-i)| \Leftrightarrow |(c-a)||c-b| = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |(c-a)||c-b| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow AC \times BC = 4\sqrt{2}$$

D'où $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

d - Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Montrer que $z' = -iz + 10 + 8i$ puis

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - b = e^{i\frac{3\pi}{2}} (z - b)$$

$$z' - b = e^{i\frac{3\pi}{2}} (z - b)$$

$$\Leftrightarrow z' - b = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)(z - b)$$

$$z' = -i(z - 9 + i) + 9 - i \Leftrightarrow z' = -iz + 9i + 1 + 9 - i$$

D'où $z' = -iz + 10 + 8i$

Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$

$$R(C) = C' \Leftrightarrow c' = -ic + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow c' = -i(11-i) + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow c' = -11i - 1 + 10 + 8i = 9 - 3i$$

D'où $c' = 9 - 3i$

Problème : (9,5 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

1) a - Montrer que $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)'$$

$$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = e^x(-1+1-x)$$

D'où $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b - Montrer que g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ puis vérifier que $g(0) = 0$

On a $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$ car $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\forall x \in [0, +\infty[$ donc $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$ donc $g'(x) \leq 0$

g est décroissante sur $[0, +\infty[$

$\forall x \in]-\infty; 0]$ donc $x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$

g est croissante sur $]-\infty; 0]$

Vérifier que $g(0) = 0$

$$g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

D'où $g(0) = 0$

2) En déduire que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a g est continue sur \mathbb{R}

Puisque g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et

croissante sur $]-\infty; 0]$ donc $g(0)$ est le maximum

de g sur \mathbb{R} c'est-à-dire $g(x) \leq g(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

or $g(0) = 0$

D'où $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2 - x)e^x - x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

b – Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire

que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - x)e^x - x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - x)e^x}{x} - \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) \frac{e^x}{x} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) \frac{e^x}{x} - 1 = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

2) a – Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x \quad (\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)e^x - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - x + x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

b – Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$$

D'où la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) a – Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (2 - x)e^x - x$$

$$f'(x) = (2 - x)'e^x + (2 - x)(e^x)' - 1$$

$$f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x - 1 = e^x(-1 + 2 - x) - 1$$

$$f'(x) = e^x(1 - x) - 1 = g(x)$$

D'où $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b – Interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$

On a $f'(0) = g(0) = 0$ donc (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

c – Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} et dresser le tableau des variations de

$$\text{On a } f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D'où f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

X	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		–
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

4) Montrer que (C_f) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0; 2)$

$$\text{On a } f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } f''(x) = g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0]$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

Donc (C_f) possède un seul point d'inflexion d'abscisse 0 et $f(0) = 2$

D'où (C_f) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0; 2)$

5) a – A l'aide d'une intégration par parties montrer

$$\text{que : } \int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$$

$$\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx$$

$$u(x) = 2 - x \quad u'(x) = -1$$

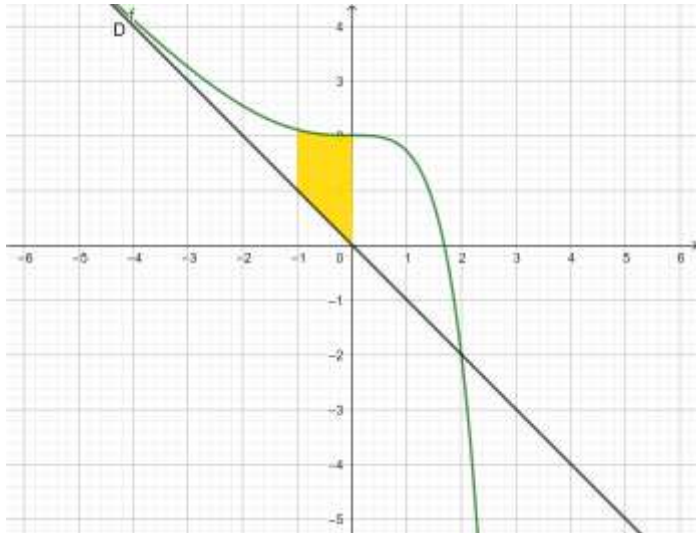
$$v'(x) = e^x \quad v(x) = e^x$$

$$\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = \left[(2 - x)e^x \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^x dx$$

$$\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = 2 - 3e^{-1} + \left[e^x \right]_{-1}^0 = 2 - \frac{3}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

D'où $\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$

b – En déduire en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.



On sait que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[-1;0]$

$$A = \int_{-1}^0 f(x) - (-x) dx \text{ cm} \times \text{cm}$$

$$A = \int_{-1}^0 f(x) + x dx \text{ cm}^2$$

$$A = \int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx \text{ cm}^2 = \left(3 - \frac{4}{e}\right) \text{ cm}^2$$

$$\text{D'où } A = \left(3 - \frac{4}{e}\right) \text{ cm}^2$$