

Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$\Delta = (4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 > 0$ l'équation admet deux solutions distinctes.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} & x_2 &= \frac{-4 - \sqrt{36}}{2} \\ &= \frac{-4 + 6}{2} = 1 & &= \frac{-4 - 6}{2} = -5 \end{aligned}$$

$$S = \{-5; 1\}$$

b - Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

$\forall x \in]0, +\infty[$ donc $x > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et $x + 2 > 0$
et $2x > 0$

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + 5) &= \ln(x + 2)2x \Leftrightarrow x^2 + 5 = (x + 2)2x \\ \Leftrightarrow x^2 + 5 &= 2x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \\ \text{Donc } x &= -5 \text{ et } x = 1 \text{ or } x > 0 \text{ donc } x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } S = \{1\}$$

2) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$\forall x \in]0, +\infty[$ donc $x > 0$ donc $x^2 + 1 > 0$ et $x + 1 > 0$

$$\begin{aligned} \ln x + \ln(x + 1) &\geq \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln[x(x+1)] \geq \ln(x^2 + 1) \\ \Leftrightarrow x(x+1) &\geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \text{or } x > 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } S = [1, +\infty[$$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que : $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour $n = 0$ on a $U_0 = 1$ donc $U_0 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > 0$ et montrons que

$$U_{n+1} > 0$$

On a $U_n > 0$ donc $8U_n > 0$ et $5 + 8U_n > 5$

$$\text{donc } U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} > 0$$

$$\text{D'où } U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis écrire V_n en fonction de n .

Montrons que $V_{n+1} = 5V_n$?

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{1}{U_{n+1}} + 2 = \frac{1}{\frac{U_n}{5 + 8U_n}} + 2 = \frac{5 + 8U_n}{U_n} + 2 \\ &= \frac{5}{U_n} + \frac{8U_n}{U_n} + 2 = \frac{5}{U_n} + 8 + 2 = 5\left(\frac{1}{U_n} + 2\right) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } V_{n+1} = 5V_n$$

(V_n) est une suite géométrique de raison 5 de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0} + 2 = 3$

$$V_n = V_0 \times 5^n$$

$$\text{D'où } V_n = 3 \times 5^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b - Montrer que $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et en déduire $\lim U_n$

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{U_n} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} = V_n - 2 \\ \Leftrightarrow U_n &= \frac{1}{V_n - 2} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \frac{1}{3 \times 5^n - 2} = 0 \quad \text{car } \lim 5^n = +\infty$$

Et $5 > 1$

$$\text{D'où } \lim U_n = 0$$

Exercice 3 : (5 pts)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation :

$$Z^2 - 18Z + 82 = 0$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 82 = -4 < 0$$

$$= (2i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{18 + 2i}{2} = 9 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 9 - i$$

$$\text{D'où } S = \{9 - i; 9 + i\}$$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $\mathbf{a} = 9 + \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 9 - \mathbf{i}$, $\mathbf{c} = 11 - \mathbf{i}$

a – Montrer que : $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} = -\mathbf{i}$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

$$\frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} = \frac{11 - \mathbf{i} - 9 + \mathbf{i}}{9 + \mathbf{i} - 9 + \mathbf{i}} = \frac{2}{2\mathbf{i}} = \frac{1}{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$$

D'où $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} = -\mathbf{i}$

On a $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} = -\mathbf{i}$ donc

$$\left| \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} \right| = |-\mathbf{i}| \Leftrightarrow \frac{|\mathbf{c} - \mathbf{b}|}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = 1 \Leftrightarrow \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{BA}} = 1$$

Donc $\mathbf{BC} = \mathbf{BA}$

$$\frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} = \cos \frac{\pi}{2} - \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathbf{i} \sin(-\frac{\pi}{2})$$

Donc $\frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + \mathbf{i} \sin(-\frac{\pi}{2})$

Or $(\overrightarrow{\mathbf{BA}}, \overrightarrow{\mathbf{BC}}) \equiv \arg \frac{\mathbf{c} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{b}} [2\pi]$

Donc $(\overrightarrow{\mathbf{BA}}, \overrightarrow{\mathbf{BC}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $\mathbf{BC} = \mathbf{BA}$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

b – Ecrire $4(1 - \mathbf{i})$ sous forme trigonométrique $4(1 - \mathbf{i})$

$$|4(1 - \mathbf{i})| = 4|1 - \mathbf{i}| = 4\sqrt{2}$$

$$4(1 - \mathbf{i}) = 4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$4(1 - \mathbf{i}) = 4\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} - \mathbf{i} \sin \frac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathbf{i} \sin(-\frac{\pi}{4}))$$

D'où $4(1 - \mathbf{i}) = \left[4\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$

c – Montrer que : $(\mathbf{c} - \mathbf{a})(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 4(1 - \mathbf{i})$

puis en déduire que $\mathbf{AC} \times \mathbf{BC} = 4\sqrt{2}$

$$\mathbf{a} = 9 + \mathbf{i}, \mathbf{b} = 9 - \mathbf{i}, \mathbf{c} = 11 - \mathbf{i}$$

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a})(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = (11 - \mathbf{i} - 9 - \mathbf{i})(11 - \mathbf{i} - 9 + \mathbf{i}) \\ = (2 - 2\mathbf{i})2 = 4(1 - \mathbf{i})$$

D'où $(\mathbf{c} - \mathbf{a})(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 4(1 - \mathbf{i})$

$$|(\mathbf{c} - \mathbf{a})(\mathbf{c} - \mathbf{b})| = |4(1 - \mathbf{i})| \Leftrightarrow |(\mathbf{c} - \mathbf{a})| |(\mathbf{c} - \mathbf{b})| = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |(\mathbf{c} - \mathbf{a})| |(\mathbf{c} - \mathbf{b})| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \mathbf{AC} \times \mathbf{BC} = 4\sqrt{2}$$

D'où $\mathbf{AC} \times \mathbf{BC} = 4\sqrt{2}$

d – Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Montrer que $\mathbf{z}' = -iz + 10 + 8i$ puis

$$\mathbf{R}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' \Leftrightarrow \mathbf{z}' - \mathbf{b} = e^{\frac{i3\pi}{2}} (\mathbf{z} - \mathbf{b})$$

$$\mathbf{z}' - \mathbf{b} = e^{\frac{i3\pi}{2}} (\mathbf{z} - \mathbf{b})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{z}' - \mathbf{b} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + \mathbf{i} \sin(\frac{3\pi}{2})(\mathbf{z} - \mathbf{b})$$

$$\mathbf{z}' = -\mathbf{i}(\mathbf{z} - 9 + \mathbf{i}) + 9 - \mathbf{i} \Leftrightarrow \mathbf{z}' = -iz + 9i + 1 + 9 - \mathbf{i}$$

D'où $\mathbf{z}' = -iz + 10 + 8i$

Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$

$$\mathbf{R}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}' \Leftrightarrow \mathbf{c}' = -ic + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c}' = -\mathbf{i}(11 - \mathbf{i}) + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{c}' = -11i - 1 + 10 + 8i = 9 - 3i$$

D'où $\mathbf{c}' = 9 - 3i$

Problème : (9,5 pts)

Partie I

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

1) a – Montrer que $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = (1 - x)'e^x + (1 - x)(e^x)'$$

$$g'(x) = -e^x + (1 - x)e^x = e^x(-1 + 1 - x)$$

D'où $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b – Montrer que g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ puis vérifier que $g(0) = 0$

On a $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ le signe de

$g'(x)$ est celui de $-x$ car $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in [0, +\infty[$ donc $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$ donc $g'(x) \leq 0$

g est décroissante sur $[0, +\infty[$

$\forall x \in]-\infty; 0]$ donc $x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$

g est croissante sur $]-\infty; 0]$

Vérifier que $g(0) = 0$

$$g(0) = (1 - 0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

D'où $g(0) = 0$

2) En déduire que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a g est continue sur \mathbb{R}

Puisque g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et

croissante sur $]-\infty; 0]$ donc $g(0)$ est le maximum

de g sur \mathbb{R} c'est-à-dire $g(x) \leq g(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

or $g(0) = 0$

D'où $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2-x)e^x - x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

b – Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire

que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)e^x - x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)e^x}{x} - \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) \frac{e^x}{x} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) \frac{e^x}{x} - 1 = -\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

2) a – Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x \quad (\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - x + x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x = 0$$

Car $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

b – Montrer que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

D'où la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) a – Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (2-x)e^x - x$$

$$f'(x) = (2-x)'e^x + (2-x)(e^x)' - 1$$

$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x - 1 = e^x(-1 + 2 - x) - 1$$

$$f'(x) = e^x(1-x) - 1 = g(x)$$

D'où $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b – Interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$

On a $f'(0) = g(0) = 0$ donc (C_f) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

c – Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} et dresser le tableau des variations de

On a $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

X	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	–	–
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

4) Montrer que (C_f) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0 ; 2)$

On a $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f''(x) = g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty; 0]$ et

$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$

Donc (C_f) possède un seul point d'inflexion d'abscisse 0 et $f(0) = 2$

D'où (C_f) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0 ; 2)$

5) a – A l'aide d'une intégration par parties montrer

$$\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$$

$$\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx$$

$$u(x) = 2-x \quad u'(x) = -1$$

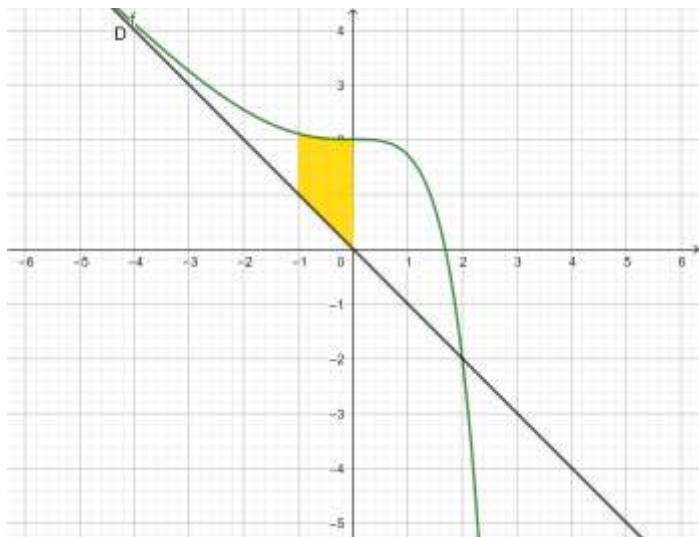
$$v'(x) = e^x \quad v(x) = e^x$$

$$\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx = \left[(2-x)e^x \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^x dx$$

$$\int_{-1}^0 (2-x)e^x dx = 2 - 3e^{-1} + \left[e^x \right]_{-1}^0 = 2 - \frac{3}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

$$\text{D'où } \int_{-1}^0 (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$$

b – En déduire en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.



On sait que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[-1;0]$

$$A = \int_1^e f(x) - (-x) dx \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$$

$$A = \int_1^e f(x) + x dx \text{ cm}^2$$

$$A = \int_1^e (2-x)e^x dx \text{ cm}^2 = (3 - \frac{4}{e}) \text{ cm}^2$$

D'où $A = (3 - \frac{4}{e}) \text{ cm}^2$