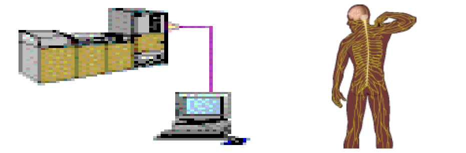


SYSTÈME AUTOMATISÉ

I- DESCRIPTION D'UN SYSTÈME ASSERVI :

A. Système asservi :

Un système asservi est un système comportant une boucle directe (boucle d'action) qui réalise une tâche en fonction de la commande d'entrée corrigée par une boucle de retour (boucle de rétroaction -feedback-) tenant compte de la valeur de sortie (mesurée par un capteur).
Un régulateur élabore un signal de commande à partir de l'écart entre la valeur d'entrée (consigne) et la valeur de retour de la boucle de feedback.

B. Entrées et sorties :

Entrées : ce sont les éléments, grandeurs, signaux ou informations qui, issus du milieu extérieur, apportent au système ce dont il a besoin pour accomplir sa mission.
Dans un système asservi, les entrées sont de plusieurs types :
- Les grandeurs de commande modifiables et contrôlables par l'opérateur. La nature du signal d'entrée est généralement différente de la nature du signal de sortie.

Exemple : à la tension d'entrée **U(t)** d'un moteur correspond la vitesse de rotation **ω(t)** de l'arbre de sortie.
- Les grandeurs de retour qui servent à informer le régulateur.
- Les signaux parasites appelés perturbations que l'on ne maîtrise pas et que l'on subit.

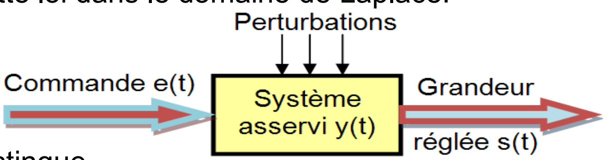
Sortie : élément, grandeur, signal ou information produit par le système. Pour un système asservi, la sortie est utilisée (boucle de rétroaction) pour juger la qualité de la tâche accomplie.

C. Commande :

Elle est définie par la loi d'entrée/sortie qui gère les variables du système.
La fonction de transfert H(p) = S(p) / E(p) correspond à cette loi dans le domaine de Laplace.

II- LES SYSTÈMES ASSERVIS – GÉNÉRALITÉS :

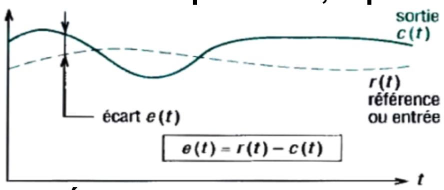
A- Définition : Un système est dit asservi lorsque la grandeur de sortie suit aussi précisément que possible les variations de la grandeur d'entrée (ordre ou consigne) quels que soient les effets perturbateurs extérieurs, on distingue.



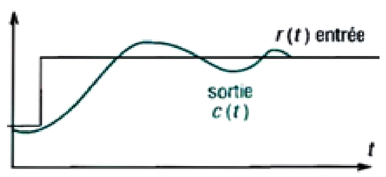
♦ **Système asservi continu :** si, à toutes entrée E(t) quel que soit t, il délivre une réponse S(t).
♦ **Système asservi linéaire :** s'il répond au principe de superposition.
♦ **Système asservi invariant :** s'il garde le même comportement au cours du temps.

B- Comportement des systèmes :

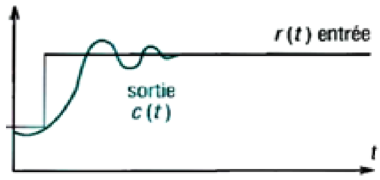
Le comportement des systèmes bouclés est mis en évidence et défini par trois caractéristiques fondamentales : **précision, rapidité et stabilité.**



Écart et précision



Système lent

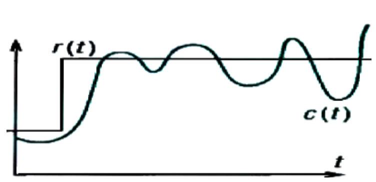


Système rapide

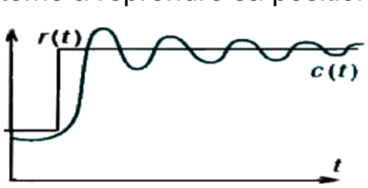
Précision : elle traduit l'écart ou l'erreur, noté e(t), avec laquelle la sortie *c(t),* «grandeur réglée par le système», suit la loi d'entrée, référence ou consigne r(t). (La précision est mesurée par l'écart entre le résultat attendu et le résultat obtenu)

Rapidité : elle caractérise la capacité du système à réagir vite à une perturbation donnée. Il s'agit, autrement dit, de son aptitude. Suite à une perturbation subie, à se rapprocher dans le temps le plus court possible de la valeur d'entrée ou consigne ''temps de réponse''. (La rapidité est mesurée par le temps mis par le système pour obtenir la sortie souhaitée)

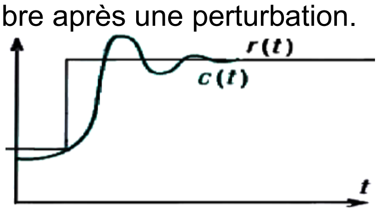
Stabilité : elle définit la capacité du système à reprendre sa position d'équilibre après une perturbation.



Système instable



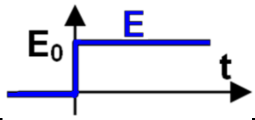
Système stable mal amorti



Système stable bien amorti

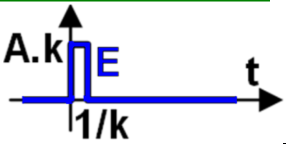
Remarque : précision, rapidité et stabilité sont étroitement liées. En conception des systèmes bouclés, on cherche à rendre compatibles rapidité, précision et bon amortissement.

C- Bilan et analyse selon le signal d'entrée :



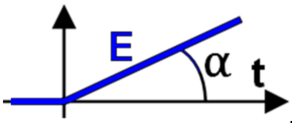
$E(t) = E_0.u(t)$
pour $t > 0$

L'entrée Échelon



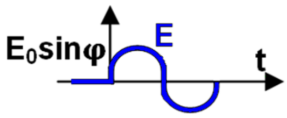
$E(t) = A.\delta(t)$
impulsion de Dirac,
$\delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$

L'entrée Impulsion



$E(t) = a.t.u(t)$
$t > 0$, avec $a = \tan\alpha$

L'entrée Rampe



$E(t) = E_0.\sin(\omega_0.t+\varphi)$
pour $t > 0$

L'entrée Sinusoïdale

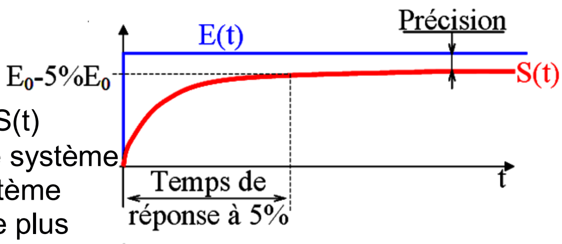
D- Réponse à ces entrées types :

Le signal réponse d'un système se décompose en deux temps : il passe d'abord par un **régime transitoire**, puis atteint ensuite un **régime permanent**.

- En **régime définitif** ou **pérmanent**, sous l'action d'un de ces signaux d'**entrée**, un système linéaire tend à présenter également en **sortie** un signal du même type. Si, en régime définitif (au bout d'un certain temps), il existe une **différence** entre le signal de sortie et le signal d'entrée, alors il y a une **erreur permanente**. On peut déterminer les différents critères de performance d'un système en étudiant sa réponse à ces signaux d'entrée type.

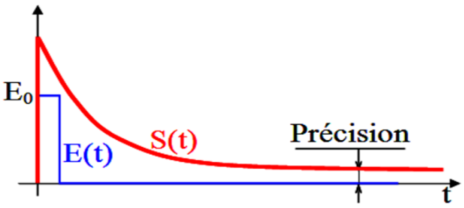
♦ **Réponse à une entrée Échelon :**

Dans le cas d'une **entrée en échlon**, **l'erreur permanente** s'appelle **écart statique** ou **précision :** c'est l'écart entre la valeur du signal d'entrée et la réponse S(t) en régime définitif ($t\to\infty$) ; plus cet écart sera **faibl e**, plus le système sera **précis**. On peut également juger de la **rapidité** du système en mesurant le temps au bout duquel la réponse ne s'écarte plus que de 5% de la valeur E_0 du signal d'entrée.



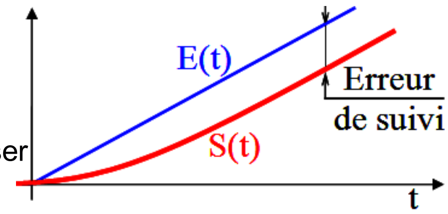
♦ **Réponse à une entrée Impulsionnelle :**

Cet essai permet de tester les performances du système face à des **perturbations** brèves et d'observersa stabilité, c'est-à-dire de voir si la réponse du système ne s'écarte pas définitivement de sa position.



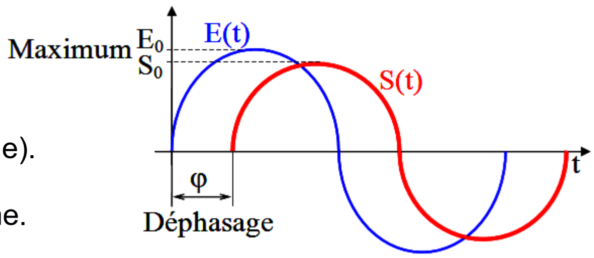
♦ **Réponse à une entrée Rampe :**

Cet essai permet d'évaluer les capacités du système à suivre une consigne variable. L'**erreur permanente** mesurée s'appelle **erreur de suivi** ou **erreur de traînage**. En pratique, on essaie d'annuler cette erreur ou de fixer un seuil d'erreur à ne pas dépasser (sécurité en cas d'obstacle rencontré pendant le fonctionnement d'un robot par exemple).



♦ **Réponse à une entrée Sinusoïdale :**

La réponse d'un système à une entrée sinusoïdale est sinusoïdale, de même période avec une amplitude S_0 et un déphasage φ (correspondant à une erreur de suivie). Un essai en entrée de type sinusoïdal permet d'étudier la **stabilité** et surtout la **marge de stabilité** d'un système.



- En **régime Transitoire**

Tout système possède un régime tansitoire précédant le régime permanent.
Si le système est mal amorti en régime tansitoire, S(t) peut prendre des valeurs trop importantes et donc ne pas atteindre un régime permanent stable. Il faut égalemnt veillé à ce que ce régime tansitoire soit de courte durée (critère de rapidité).
Le régime tansitoire d'un système de commande doit être bien amorti et suffisamment rapide.

III- ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES → TRANSFORMÉES DE LAPLACE ET SES APPLICATIONS :

A- Définition : La transformée de Laplace de la fonction f(t), telle que f(t)=0 pour t<0 est :

$$f(t) \xrightarrow{L} L(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt}dt \quad où \quad p \in \mathbb{C}$$

Cette transformation permet de passer du domaine temporel dans le domaine de Laplace.

Nom de la fonction	domaine temporel ⇒	domaine de Laplace
Linéarité	$[a.f1(t)+bf2(t)].u(t)$ ⇒	$a.F1(p) + b.F2(p)$
Dérivation	$f'(t).u(t)\,;\,f''(t).u(t)$ ⇒	$p.F(p) - f(0^+)\ ;\ p^2.F(p) - p.f(0^+) - f'(0^+)$
Intégration	$\int_0^t f(x).dx.u(t)$ ⇒	$\dfrac{F(p)}{p}$
Retard	$f'(t-T).u(t-T)$ ⇒	$e^{-Tp}.F(p)$
Facteur d'échelle	$f(at).u(t)\ \ où\ \ a \neq 0$ ⇒	$\dfrac{1}{a}.F\left(\dfrac{p}{a}\right)$
Amortissement	$e^{-at}f(t).u(t)\ où\ a = Cte$ ⇒	$F(p+a)$
Multiplication par t^n	$t^n f(t).u(t)$ ⇒	$(-1)^n \dfrac{d^nF(p)}{dp^n}$
Valeur initiale	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(t)$ ⇒	$\lim\limits_{p\to +\infty} pF(p)$
Valeur finale	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(t)$ ⇒	$\lim\limits_{p\to 0^+} pF(p)$

Ce tableau sera appelé " **Tableau de référence**" des transformées de Laplace.
Il est bon d'en connaître les expressions les plus couramment utilisées.

f(t).u(t)	F(p)	f(t).u(t)	F(p)
δ(t) (impulsion)	1	$e^{at}.t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
K.1 (échelon unité)	$\dfrac{K}{p}$	$e^{-at}.t^n$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
K.t	$\dfrac{K}{p^2}$	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$	$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$1-e^{-t/\tau}$	$\dfrac{1}{p(1+\tau p)}$	$e^{-at}\cos \omega t$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!

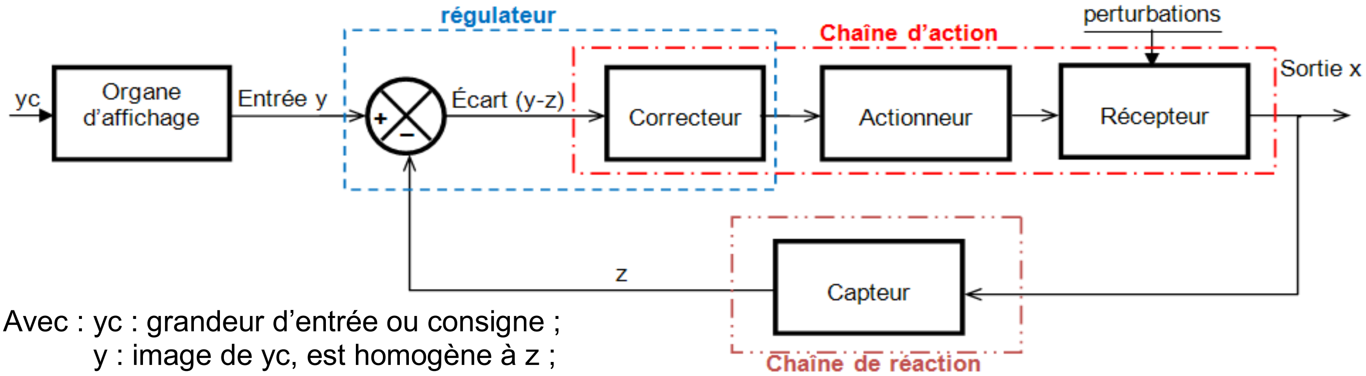
Fonction transfert H(p) ⟶ entrée ? Selon le signal d'entrée, on choisit la colonne de gauche ou de droite.

Entrée standard (domaine temporel) **F**onction de **T**ransfert en **B**oucle **F**ermée **(F.T.B.F)** e(t) = entrée standard Laplace ⟶ E(p) = Tableau de référence (ci-dessus)	Entrée sinusoïdale (domaine fréquentiel) **F**onction de **T**ransfert en **B**oucle **O**uvert **(F.T.B.O)** e(t) = e_0.sin(ωt) s(t) = s_0.sin(ωt+φ)
H(p) = S(p) / E(p) ⟶ S(p) = H(p) . E(p)	Écrire p = jω dans la F.T.B.O
Décomposition en éléments simples Transformées inverses de Laplace Équation temporelle de la sortie s(t) FT du premier ordre $\dfrac{K}{1+\tau p}$ K : gain statique τ : constante de temps FT du second ordre $\dfrac{K}{\left(1+2\dfrac{\xi}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0}p^2\right)}$ racine réelles $\dfrac{1}{p+a}$ racine complexes $\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$ racine complexes $\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$ stabilité : critère de Routh.	Amplitude : $\lvert H(j\omega)\rvert$ Gain : $20\log\lvert H(j\omega)\rvert$ Phase : $Arg\left[H(j\omega)\right]$ FT du premier ordre $20\log\lvert K\rvert$ $\omega_c=\dfrac{1}{\tau}$ (*fréquence de coupure*) *pente à l'∞ : −20 dB / déc* FT du second ordre $20\log\lvert K\rvert$ $\omega_c=\omega_0$ (*fréquence de coupure*) *pente à l'∞ : −40 dB / déc* $\omega_{rMaxi}=\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$ (*résonance*) Stabilité : marge de phase et de gain.

B- Fonctions d'un système asservi :

- Observation de l'état du système ⟶ Utilisation de capteur.
- Comparaison – Réflexion ⟶ L'état mesuré est comparé à l'état souhaité et la modification éventuelle de la commande est déterminée. L'organe qui réalise ces deux fonctions est appelé régulateur.
  Il est composé d'un comparateur ou soustracteur et d'un correcteur.
- Action L'actionneur apporte la puissance nécessaire à la réalisation de la tâche.

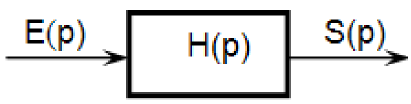
C- Schéma fonctionnel d'un système asservi élémentaire (dans le domaine temporel) :



Avec : yc : grandeur d'entrée ou consigne ;
y : image de yc, est homogène à z ;
y- z : est l'erreur ;
x : grandeur de sortie ;
z : mesure de capteur.

D- Schéma fonctionnel d'un système asservi dans le domaine symbolique de Laplace :

H(p) : **Transmittance** ou **fonction de transfert** d'un système dans le domaine de Laplace



IV- SCHÉMAS FONCTIONNELS : (Schémas-blocs)

4.1- Fonction de transfert :

En Classes $2^{ème}$ STM, l'étude des systèmes asservis se ramène toujours à la mise en place dans le domaine temporel d'une ou plusieurs équations différentielles à coefficients constants de la forme :

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 = e(t) \quad \text{c.à.d ;} \quad a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 = e(t)$$

L'utilisation des transformées de Laplace permet de transférer ces équations dans le domaine de **Laplace** appelé aussi domaine **symbolique** (où il est convenu de prendre la lettre **p** comme paramètre).

L'étude théorique des systèmes linéaires à coefficients constants permet de mettre en place une relation de type **S(p) = H(p).E(p)**, avec :

- **H(p)** est appelée fonction de **transfert du système** (on emploie aussi la transmittance).
- **S(p)** représente la sortie du système alors que **E(p)** représente l'entrée dans le domaine de **Laplace**.

4.2- Interprétation de la fonction de transfert :

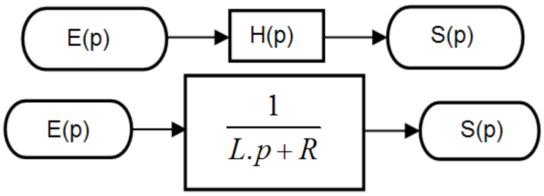
La réponse impulsionnelle a pour expression dans le domaine de Laplace : **E(p) = 1**.

Il paraît alors logique de dire que la fonction de transfert est la transformée **H(p)** de Laplace de la réponse impulsionnelle. Car il suffit de remplacer **E(p)** dans l'expression **S(p) = H(p). E(p)** par 1 pour obtenir **S(p) = H(p)**.

Mais générer une entrée impulsionnelle réelle est pratiquement impossible. La remarque précédente n'a donc pas d'intérêt pratique.

4.3- Schématisation de la fonction de transfert : (schéma fonctionnel ou schéma-bloc)

a- Blocs :

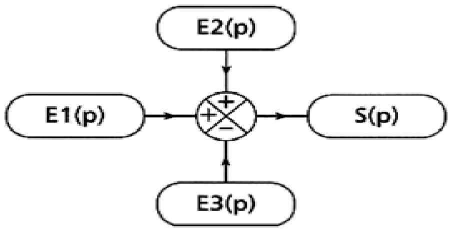


On convient de modéliser une fonction de transfert par un rectangle dans lequel on définit la fonction de transfert **H(p)**.

À ce rectangle, on associe une entrée **E(p)** et une sortie **S(p)**.

Le rectangle associé à la fonction de transfert est le bloc du schéma fonctionnel. (Exemple)

b- sommateurs :



Les sommateurs permettent des opérations entre les blocs.
Ils annoncent l'addition ou la soustraction d'une entrée.

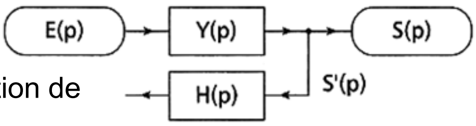
Ils se représentent par des cercles munis d'une croix.

Les signes "**+**" ou "**-**" associés aux branches entrantes précisent si l'entrée s'additionne ou se soustrait.

Ces sommateurs sont multi-entrée mais ne possèdent qu'une sortie.

c- Jonctions ou points de prélèvement :

Une branche de prélèvement se représente selon le schéma suivant :



Important : une branche de prélèvement prend le même signal que la branche principale et n'affecte pas le signal de cette branche principale. Ici, **S(p)** et **S'(p)** prennent la valeur **Y(p).E(p)** sans altération de cette valeur. On dit qu'un prélèvement est non perturbateur.

4.4- Schématisation de la fonction de transfert d'un système complexe :

La description d'un système complexe conduit à écrire plusieurs équations différentielles faisant intervenir plusieurs variables intermédiaires reliées entre elles. Le passage dans le **domaine de Laplace** rend linéaire le système d'équations.

La fonction de transfert globale est alors une combinaison des fonctions de transfert élémentaires.

On peut définir la fonction de transfert globale à l'aide de deux méthodes :

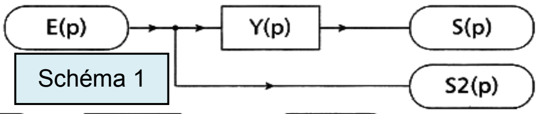
1) Résoudre le système d'équations définies dans le domaine de Laplace.
2) Construire les schémas fonctionnels de chaque fonction de transfert élémentaire :
   - Placer les entrées et les sorties de chaque fonction de transfert en coïncidence, c'est-à-dire relier la sortie de la fonction de transfert 1 à l'entrée de la fonction de transfert 2 par exemple, etc.
   - Appliquer les règles relatives aux schémas fonctionnels.
   - En déduire la **F**onction de **T**ransfert en **B**oucle **F**ermée (**FTBF**).

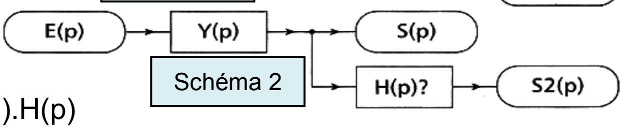
4.5- Règles de déplacement dans les opérations sur les schémas fonctionnels :

Le déplacement d'un sommateur ou d'un point de prélèvement ne doit pas affecter le système.
On en déduit les règles suivantes :

a- Déplacement des points de prélèvement :

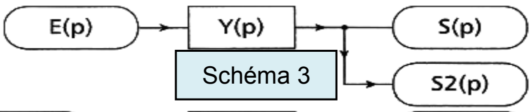
1) Prendre un point de prélèvement placé **avant** un bloc, pour le placer après le bloc.

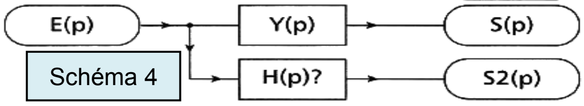




Démonstration :
- Schéma **1** : S(p) = Y(p).E(p) ; S2(p) = E(p).
- Schéma **2** : S2(p) doit être **inchangé** ; S2(p) = E(p).Y(p).H(p) doit rester égal à E(p). On constate la nécessité d'interposer une fonction H(p) = 1/Y(p) de façon que Y(p).[1/Y(p)] = 1 qui permettra une sortie S2(p) inchangée.

2) Prendre un point de prélèvement placé **après** un bloc, pour le placer avant le bloc.



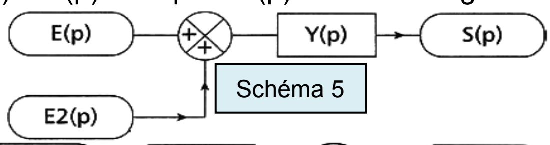


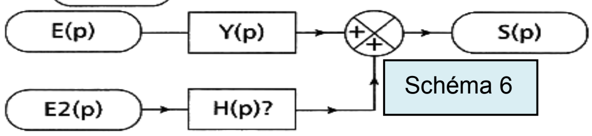
Démonstration :
- Schéma **3** : S(p) = Y(p).E(p) ; S2(p) = Y(p).E(p).
- Schéma **4** : S(p) = Y(p).E(p) ; S2(p) = H(p).E(p) = S(p).

On constate l'utilité d'interposer une fonction intermédiaire H(p) = Y(p) afin que S2(p) reste inchangée.

b- Déplacement des sommateurs :

1) Prendre un somrnateur placé **avant** un bloc, pour le placer après le bloc.

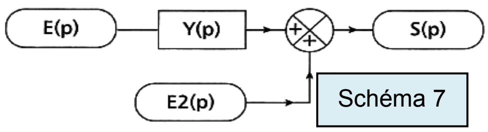


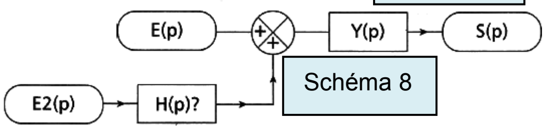


Démonstration :
- Schéma **5** : S(p) = [E(p) + E2(p)].Y(p).
- Schéma **6** : quelle fonction de transfert H(p) faut-il placer pour que S(p) reste inchangée ?

S(p) = E(p).Y(p) + H(p).E2(p) = [E(p) + E2(p)].Y(p) = solution du schéma 5.
On constate l'utilité d'interposer une fonction intermédiaire H(p) = Y(p) afin que S(p) reste inchangée.

2) Prendre un sommateur placé **après** un bloc, pour le placer avant le bloc.



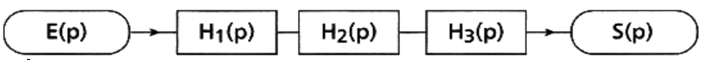


Démonstration :
- Schéma **7** : S(p) = E(p).Y(p) + E2(p).
- Schéma **8** : quelle fonction de transfert H(p) faut-il placer pour que S(p) reste inchangée ?

S(p) = [E(p) + E2(p).H(p)].Y(p) = E(p).Y(p) + E2(p) = solution du schéma 1 E2(p).H(p).Y(p) = E2(p).
On constate l'utilité d'interposer une fonction intermédiaire H(p) =1/Y(p) afin que S(p) reste inchangée.

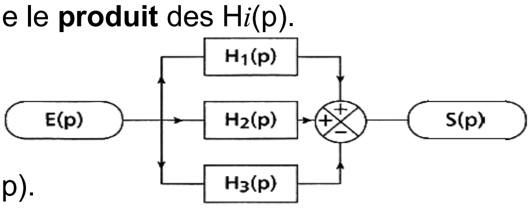
4.6- Types d'association de fonctions de transfert :

a- Ensemble en série :



Si ''n'' éléments de fonction de transfert H*i*(p) sont placés en **série**, la fonction de transfert globale est alors H(p) = H1(p).H2(p).H3(p) ... Hn(p). L'ensemble en **série** implique le **produit** des H*i*(p).

b- Ensemble en parallèle :



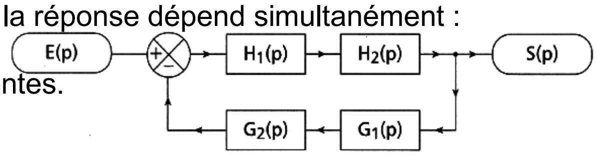
Si ''n'' éléments de fonction de transfert H*i*(p) sont placés en **parallèle**, la fonction de transfert globale est alors H(p) = H1(p) **+** H2(p) **-** H3(p) **+** ... Hn(p).
L'ensemble en **parallèle** implique la **somme** algébrique des H*i*(p).

c- Fonction de transfert équivalente d'une Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) :

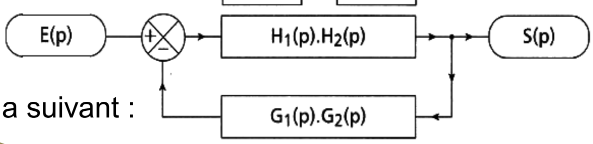
Un système dynamique (**boucle fermée**) est un système dont la réponse dépend simultanément :
- de la commande en cours,
- de la réponse et des conséquences des commandes précédentes.

Une fonction de transfert en boucle fermée est composée :
- d'une fonction de transfert pour la boucle directe : **H(p)**,
- d'une fonction de transfert pour la boucle de retour : **G(p)**.

Le schéma fonctionnel d'une **F.T.B.F** est le suivant :

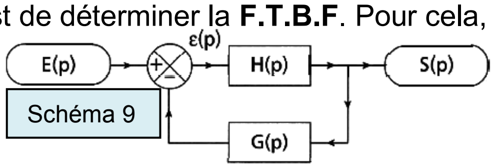


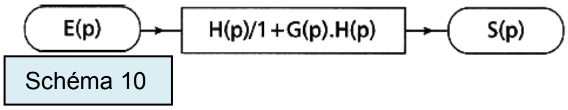
Les règles des schémas-blocs permettent de passer au schéma suivant :



d- Écriture d'une fonction de transfert en boucle fermée par absorption de la boucle de retour :

Le but est de déterminer la **F.T.B.F**. Pour cela, on rend équivalents les deux schémas fonctionnels suivants :





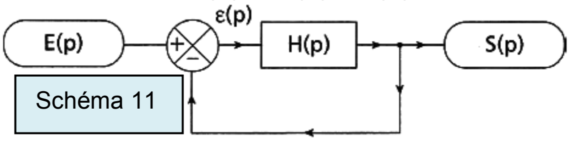
Démonstration : Puisqu'un sommateur se trouve avant la fonction de transfert H(p), la sortie S(p) dépend de E(p) et d'une autre fonction de transfert qui se retranche grâce à ce sommateur.
Appelons ε(p) la différence entre les deux entrées.
Ainsi, S(p) = H(p).ε(p) après le passage de ε(p) dans H(p). La boucle de retour apporte au sommateur la valeur G(p).S(p), car au point de prélèvement, le retour vers G(p) est égal à S(p) d'après la règle des points de prélèvement. Donc :

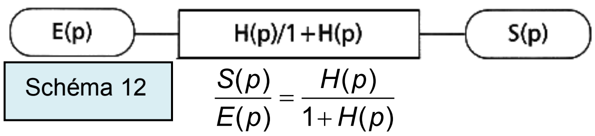
ε(p) = E(p) - G(p).S(p).
S(p) = H(p).(E(p) - G(p).S(p)) = H(p).E(p) - H(p).G(p).S(p).
S(p) + H(p).G(p).S(p) = H(p).E(p).
S(p).(1 + G(p).H(p)) = H(p).E(p).

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1+G(p).H(p)} = F(p)$$

Il y a équivalence entre les deux schémas fonctionnels 9 et 10 si l'on remplace l'association de la chaîne directe et de la chaîne de retour par une seule chaîne directe dont la F.T.B.F est F(p).

Remarque : Cas du système à retour unitaire : c'est le cas où la branche de retour renvoie la valeur de la sortie S.
Dans ce cas, ε(p) = E(p) - S(p), c'est-à-dire G = 1 (d'où son appellation de retour unitaire).





$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{H(p)}{1+H(p)}$$

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!