Correction

Rep. Ex 2-

1- Pour calculer les réactions des appuis simples, il faut appliquer le PFS :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{F}+\vec{F}=\vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oy : A+B-2F=0$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/A}F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/A}\vec{A}}+\overrightarrow{M_{/A}\vec{B}}+\overrightarrow{M_{/A}\vec{F}}+\overrightarrow{M_{/A}\vec{F}}=\vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oz : 0+\|\vec{B}\|\cdot 3{,}5-\|\vec{F}\|\cdot 1-\|\vec{F}\|\cdot 2{,}5=0$$

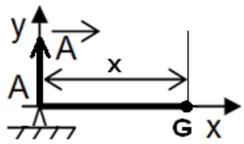
Donc : $\|\vec{B}\|=\|\vec{F}\|=3000\ N$ et $\|\vec{A}\|=\|\vec{F}\|=3000\ N$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz}

➢ Zone AC $0 \le x \le 1$

♦ $T_y = -[A] = -3000\ N$

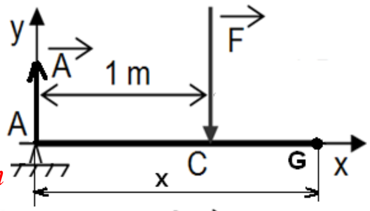
♦ $M_{fGz} = -[-A\cdot x]\ si \begin{cases} x=0; M_{fGz}=0\ Nm \\ x=1; M_{fGz}=3000\ Nm \end{cases}$



➢ Zone CD $1 \le x \le 2{,}5$

♦ $T_y = -[A-F] = 0\ N$

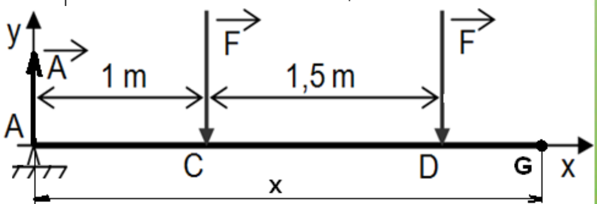
♦ $M_{fGz} = -[-A\cdot x + F\cdot(x-1)]\ si \begin{cases} x=1; M_{fGz}=3000\ Nm \\ x=2{,}5; M_{fGz}=3000\ Nm \end{cases}$



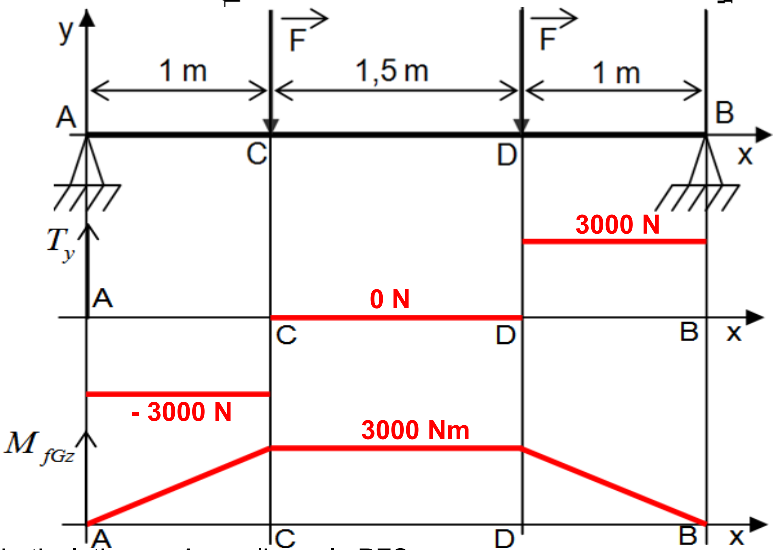
➢ Zone DB $2{,}5 \le x \le 3{,}5$

♦ $T_y = +[B] = 3000\ N$

♦ $M_{fGz} = +[B\cdot(3{,}5-x)]\ si \begin{cases} x=2{,}5; M_{fGz}=3000\ Nm \\ x=3{,}5; M_{fGz}=0\ Nm \end{cases}$



Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.
(Échelle ♦ des forces : 1cm ⟶ 3000 N
♦ des moments : 1cm ⟶ 3000 N.m)



Rep. Ex 3-

1- Calculer des réactions de l'appui simple et de l'articulation en A, appliquer le PFS :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{A}+\vec{B}+\overrightarrow{R_C}=\vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oy : A+B-R_C=0$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/A}F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/A}\vec{A}}+\overrightarrow{M_{/A}\vec{B}}+\overrightarrow{M_{/A}\overrightarrow{R_C}}=\vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oz : 0+\|\vec{B}\|\cdot 1-\|\overrightarrow{R_C}\|\cdot 3=0$$

La réaction est portée par l'axe $-\vec{y}$

Donc : $\|\vec{B}\|=\|\overrightarrow{R_C}\|\cdot\frac{3}{1}=800\cdot 3=2400\ daN$ et $\|\vec{A}\|=\|\overrightarrow{R_C}\|-\|\vec{B}\|=-1600\ daN$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

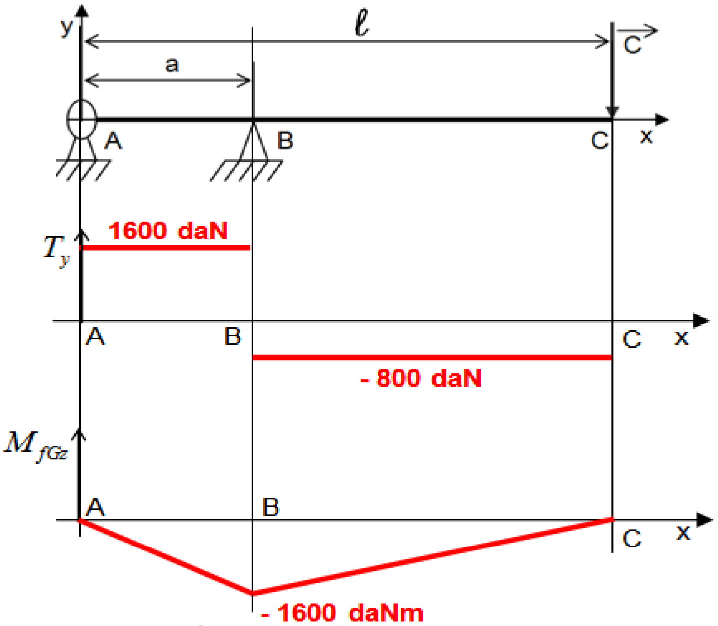
➢ Zone AB : $0 \le x \le 1$; ♦ $T_y = -[-1600] = 1600\ daN$ et ♦ $M_{fGz} = -[1600\cdot x]\ si \begin{cases} x=0; M_{fGz}=0\ daNm \\ x=1; M_{fGz}=-1600\ daNm \end{cases}$

➢ Zone BC : $1 \le x \le 3$; ♦ $T_y = +[-800] = -800\ daN$ et ♦ $M_{fGz} = +[-800\cdot(3-x)]\ si \begin{cases} x=1; M_{fGz}=-1600\ daNm \\ x=3; M_{fGz}=0\ daNm \end{cases}$

Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Échelle ◆ des forces : 1 cm ⟶ 1600 daN

◆ des moments : 1cm ⟶ 1600 daN.m)



Rep. Ex 4-

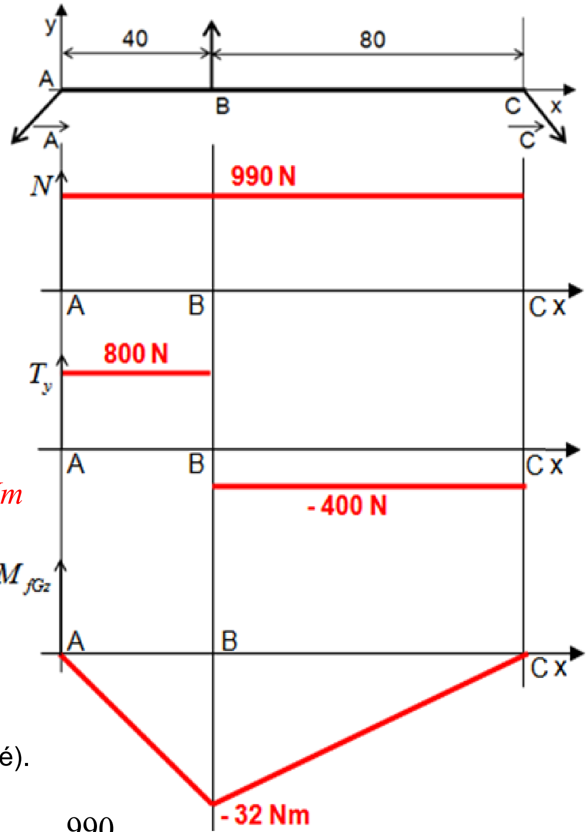
1- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz}

➢ Zone AB $0 \le x \le 0,04$

- $N = -[-990] = 990\ N$
- $T_y = -[-800] = 800\ N$
- $M_{fGz} = -[+800 \cdot x]\ si \begin{cases} x = 0; M_{fGz} = 0 \\ x = 0,04;\ M_{fGz} = -32\ Nm \end{cases}$

➢ Zone BC $0,04 \le x \le 0,12$

- $N = +[990] = 990\ N$
- $T_y = +[-400] = -400\ N$
- $M_{fGz} = +[-400 \cdot (0,12 - x)];\ si \begin{cases} x = 0,04; M_{fGz} = -32\ Nm \\ x = 0,12;\ M_{fGz} = 0 \end{cases}$



2- voir les graphes :

3- ◆ $|N|_{max} = 990\ N$ le long de la poutre (Traction).

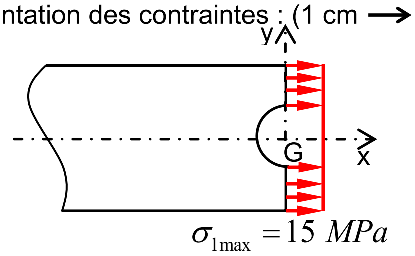
◆ $|T_y|_{max} = 800\ N$ dans la zone AB.

◆ $|M_{fGz}|_{max} = 32\ Nm$ au point B, (C'est la zone la plus sollicité).

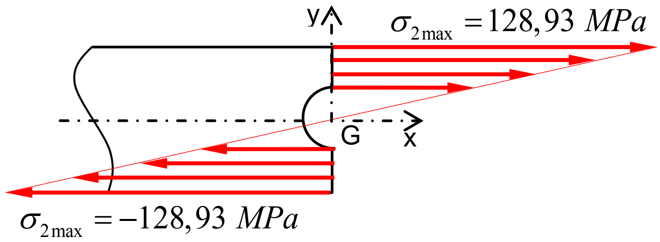
4- Contrainte normale due à l'effort normal N : $\sigma_1 = \dfrac{N}{S} = \dfrac{990}{6.(16-5)} = \dfrac{990}{66} = 15\ MPa$

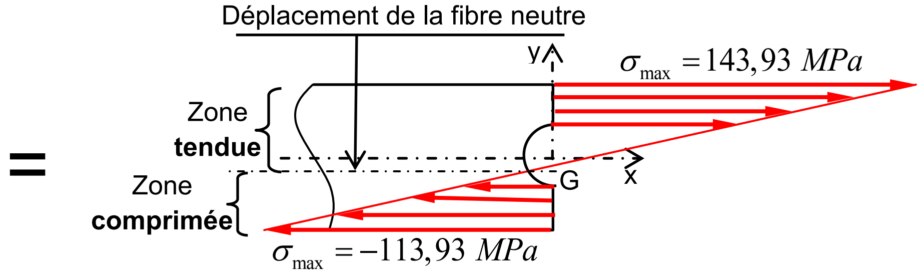
5- Contrainte normale due au moment flecissant M_{fGz} : $\sigma_2 = -\dfrac{M_{fGz}}{I_{Gz}} \cdot (\pm y) = -\dfrac{-32 \cdot 10^3}{\dfrac{6}{12}\left(16^3 - 5^3\right)} \cdot (\pm 8) = \pm 128,93\ MPa$

6- Représentation des contraintes : (1 cm ⟶ 30 Mpa)



+





POUTRES ENCASTRÉES

Rep. Ex 6-

1- Les réactions de l'encastrements ($\vec{C}$ et $\overrightarrow{M_C}$), appliquer le PFS :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$ et $proj/oy: -A - B + C = 0$ d'où $C = 860 + 1060 = 1920\ N$ c.à.d: $\vec{C} = 1920\ \vec{y}\ (en\ N)$

$\sum \overrightarrow{M_{/C}F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/C}\vec{A}} + \overrightarrow{M_{/C}\vec{B}} + \overrightarrow{M_{/C}\vec{C}} + \overrightarrow{M_C} = \vec{0}$ et $proj/oz: A\cdot(a+b) + B\cdot b + M_C = 0$

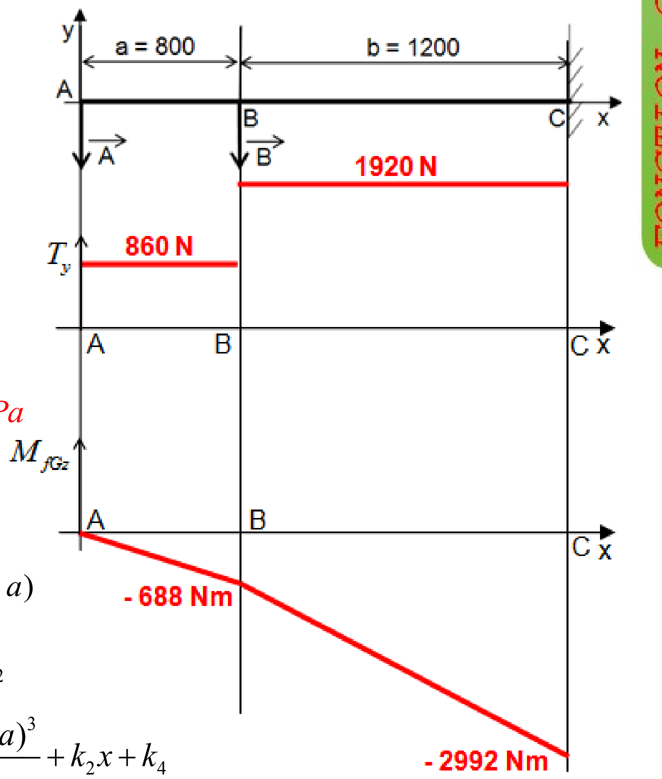
Donc : $M_C = -860\cdot 2 - 1060\cdot 1,2 = -2992\ Nm$; c.à.d : $\overrightarrow{M_C} = -2992\ \vec{z}\ (en\ Nm)$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

➢ Zone AB : $0 \le x \le 0,8$; ♦ $T_y = -[-860] = 860\ N$ et ♦ $M_{fGz} = -[860\cdot x]$ $si \begin{cases} x = 0; M_{fGz} = 0\ Nm \\ x = 0,8; M_{fGz} = -688\ Nm \end{cases}$

➢ Zone BC : $0,8 \le x \le 2$; ♦ $T_y = +[1920] = 1920\ N$ et ♦ $M_{fGz} = +[1920\cdot(2-x) - 2992]$ $si \begin{cases} x = 0,8; M_{fGz} = -688\ Nm \\ x = 2; M_{fGz} = -2992\ Nm \end{cases}$

3- Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.
Échelle ◆ des forces : 1 mm ⟶ 100 N
◆ des moments : 1 mm ⟶ 100 N.m
Voir les graphes :



4- La section dangereuse se trouve au point C,
car, $|T_y|_{\max} = 1920\ N$ dans la zone BC
$|M_{fGz}|_{\max} = 2920\ Nm$ au point C

5- Contrainte normale due au moment flecissant M_{fGz} :

$$\left\|\overrightarrow{\sigma_x}\right\|_{\max} = \frac{M_{fGz\max i}}{I_{Gz}}\cdot y_{\max} = \frac{2992\cdot 10^3\cdot 12}{25\cdot 100^3}\cdot 50 = 71,808\ MPa$$

6- si, $\vec{A} = \vec{0}$,

dans la zone AB : $M_{fGz} = 0$; $EI_{Gz}y''_{AB} = 0$

dans la zone BC : $M_{fGz} = -B(x-a)$; $EI_{Gz}y''_{BC} = -B(x-a)$

1er intégrale : $EI_{Gz}y'_{AB} = k_1$ et $EI_{Gz}y'_{BC} = -\dfrac{B(x-a)^2}{2} + k_2$

2ème intégrale : $EI_{Gz}y_{AB} = k_1x + k_3$ et $EI_{Gz}y_{BC} = -\dfrac{B(x-a)^3}{6} + k_2x + k_4$

Les conditions initiales : $x = \ell;\ y'_{BC}(\ell) = 0\ et\ y_{BC}(\ell) = 0 \Rightarrow k_2 = \dfrac{Bb^2}{2}$ et $k_4 = -\dfrac{Bb^2}{6}(2\ell + a)$

$x = a;\ y'_{BC}(a) = y'_{AB}(a)\ et\ y_{AB}(a) = y_{BC}(a) \Rightarrow\ k_1 = k_2\ et\ k_3 = k_4$

Donc : $y_{BC}(x) = \dfrac{1}{EI_{Gz}}\left[-\dfrac{B(x-a)^3}{6} + \dfrac{Bb^2}{2}x - \dfrac{Bb^2}{6}(2\ell + a)\right]$ Alors : $y_{BC}(a) = -\dfrac{Bb^3}{3EI_{Gz}}$

Rep. Ex 7-

1- Les réactions de l'encastrements ($\overrightarrow{R_O}$ et $\overrightarrow{M_O}$), appliquer le PFS :

$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{Ft} + \overrightarrow{R_O} = \vec{0}$ Alors $\overrightarrow{R_O} = -\overrightarrow{Ft} = Ft \cdot \vec{y}$ et $\sum \overrightarrow{M_{/O}F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/O}Ft} + \overrightarrow{M_{/O}R_O} + \overrightarrow{M_O} = \vec{0}$ Alors $\overrightarrow{M_O} = \left\|\overrightarrow{Ft}\right\| \cdot h \cdot \vec{z}$

2- 3- La zone OA : $0 \le x \le h$; $M_{fGz} = Ft(h-x)\ si \begin{cases} x = 0; M_{fGz} = 0 \\ x = h;\ M_{fGz} = Ft \cdot h \end{cases}$

4- La condition de résistance : $\left\|\vec{\sigma}\right\|_{\max} = \dfrac{M_{fGz\max}}{I_{Gz}} \cdot y_{\max} = \dfrac{12 \cdot Ft \cdot h}{b \cdot s^3} \cdot \dfrac{s}{2} \le \sigma_{adm}$

5- Relation de m : $\dfrac{12 \cdot Ft \cdot 2{,}25 \cdot m}{k \cdot m \cdot \left(\dfrac{\pi \cdot m}{2}\right)^3} \cdot \dfrac{\pi \cdot m}{2 \cdot 2} = \dfrac{Ft \cdot 5{,}4768}{k \cdot m^2} \le \sigma_{adm} \Rightarrow m \ge 2{,}34\sqrt{\dfrac{Ft}{k \cdot \sigma_{adm}}}$

6- Calcul de m : $m \ge 2{,}34\sqrt{\dfrac{2C}{dk \cdot \sigma_{adm}}} = 2{,}34\sqrt{\dfrac{2 \cdot 5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10 \cdot 200}} = 1{,}654$ Alors : $m = 1{,}654\ mm$

Rep. Ex 8-

1- Résolution par torseur : La poutre 1 est en équilibre sous l'action de 3 torseurs des forces extérieurs :

- Torseur force en A : $\{\tau_{3/1}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -500 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$
- Torseur force en B : $\{\tau_{4/1}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -250 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$
- Torseur force en C : $\{\tau_{2/1}\}_C = \begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ Y_C & M_C \\ Z_C & N_C \end{Bmatrix}_C$

Appliquer le PFS sur la poutre 1 : $\sum \{\tau_{Fext/A}\}_A = \{\vec{0}\}$

Exprimons tous les torseurs en même point ; A par exemple : (relation de transport des moments)

➢ $\overrightarrow{M_{/A}B_{4/1}} = \overrightarrow{M_{/B}B_{4/1}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{B_{4/1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}047 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -250 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -11{,}75 \end{pmatrix}$ Donc : $\{\tau_{4/1}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -250 & 0 \\ 0 & -11{,}75 \end{Bmatrix}_A$

➢ $\overrightarrow{M_{/A}C_{2/1}} = \overrightarrow{M_{/B}C_{2/1}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{C_{2/1}} = \begin{pmatrix} L_C \\ M_C \\ N_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}105 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_C \\ M_C - 0{,}105 \cdot Z_C \\ N_C + 0{,}105 \cdot Y_C \end{pmatrix}$ Donc : $\{\tau_{2/1}\}_A = \begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ Y_C & M_C - 0{,}105 \cdot Z_C \\ Z_C & N_C + 0{,}105 \cdot Y_C \end{Bmatrix}_A$

PFS : $\{\tau_{3/1}\}_A + \{\tau_{4/1}\}_A + \{\tau_{2/1}\}_A = \{\vec{0}\}$

$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -500 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -250 & 0 \\ 0 & -11{,}75 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ Y_C & M_C - 0{,}105 \cdot Z_C \\ Z_C & N_C + 0{,}105 \cdot Y_C \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ ce qui donne : $\begin{vmatrix} X_C = 0 \\ Y_C = 750 \\ Z_C = 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{Vmatrix} L_C = 0 \\ M_C = 0 \\ N_C = -67 \end{Vmatrix}$

Alors le torseur statique au point C : $\{\tau_{2/1}\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 750 & 0 \\ 0 & -67 \end{Bmatrix}_C$

Ou bien : $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$; $proj/oy : -500 - 250 + C = 0$;

$\overrightarrow{M_{/A}A_{3/1}} + \overrightarrow{M_{/A}B_{4/1}} + \overrightarrow{M_{/A}C_{2/1}} + \overrightarrow{M_C} = \vec{0}$; $proj/oz : 0 - B \cdot 0{,}047 + C \cdot 0{,}105 + M_C = 0$;

Alors : $C = 750\ N\vec{y}$ et $M_C = 250 \cdot 0{,}047 - 750 \cdot 0{,}105 = -67\ Nm\ \vec{z}$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

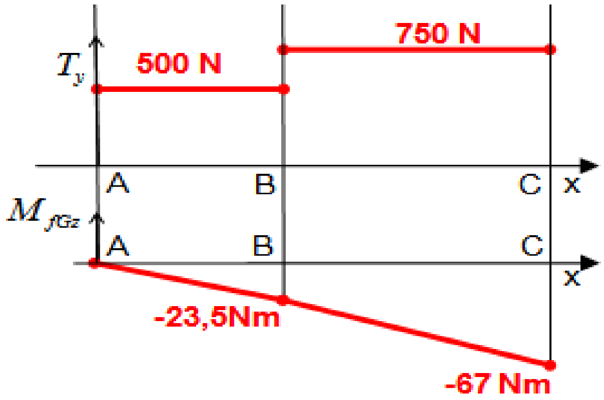
➢ Zone AB : $0 \le x \le 0,047$; ♦ $T_y = -[-500] = 500\ N$ et

♦ $M_{fGz} = -[500 \cdot x]$ si $\begin{cases} x = 0; M_{fGz} = 0\ Nm \\ x = 0,047; M_{fGz} = -23,5\ Nm \end{cases}$

➢ Zone BC : $0,047 \le x \le 0,105$; ♦ $T_y = +[750] = 750\ N$

♦ $M_{fGz} = +[750 \cdot (0,105 - x) - 67]$ si $\begin{cases} x = 0,047; M_{fGz} = -23,5\ Nm \\ x = 0,105; M_{fGz} = -67\ Nm \end{cases}$

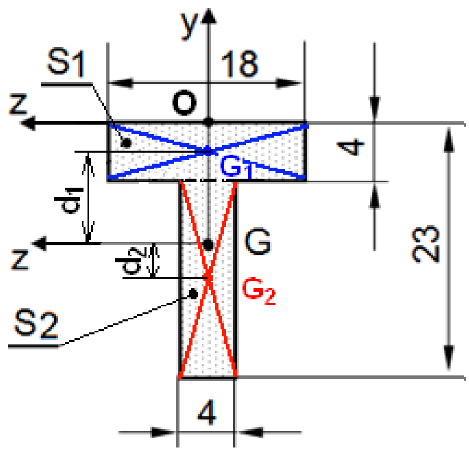
3- Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.
Échelle ♦ des forces : 1 mm ⟶ 50 N
♦ des moments : 1 mm ⟶ 5 N.m
Voir les graphes :



4- La section dangereuse se trouve au point C,
car, $|T_y|_{max} = 750\ N$ dans la zone BC
$|M_{fGz}|_{max} = 67\ Nm$ au point C

5- ➢ La distance OG :

Soit le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, un repère orthonormé :



$$Y_G = \frac{Y_{G1} \cdot S_1 + Y_{G2} \cdot S_2 + \cdots + Y_{Gn} \cdot S_n}{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}$$

$$Y_G = \frac{(-2) \cdot 4 \cdot 18 + (-13,5) \cdot 4 \cdot 19}{4 \cdot 18 + 4 \cdot 19} = -7,905$$; Alors $OG = 7,9\ mm$

➢ Le moment quadratique I_{Gz}

On a $I_{Gz} = I_{1Gz} + I_{2Gz}$ et par l'application du théorème de Huygens :

$$I_{Gz} = I_{1Gz} + I_{2Gz} = \left(I_{G_1z} + S_1 \cdot d_1^2\right) + \left(I_{G_2z} + S_2 \cdot d_2^2\right)$$

$$I_{Gz} = \left(\frac{18 \cdot 4^3}{12} + 4 \cdot 18 \cdot 5,9^2\right) + \left(\frac{4 \cdot 19^3}{12} + 4 \cdot 19 \cdot 5,6^2\right)$$

$$I_{Gz} = 2602,32 + 4669,6933 = 7272,0133\ mm^4$$

6- Contrainte normale due au moment fléchissant M_{fGz} :

$$\sigma_{max} = -\frac{M_{fGz\,maxi}}{I_{Gz}} \cdot (\pm y_{max})$$

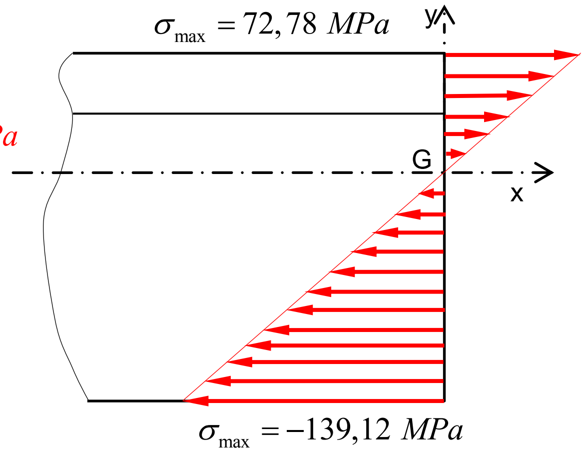
Dans la zone tendue (zone de traction) $\sigma_{max} \rangle\ 0$;

pour $y_{max} = 7,9\ mm$; $\sigma_{max} = -\frac{-67 \cdot 10^3}{7272,013} \cdot 7,9 = 72,78\ MPa$

Dans la zone comprimée (zone de compression) $\sigma_{max} \langle\ 0$;

pour $y_{max} = -15,1\ mm$; $\sigma_{max} = -\frac{-67 \cdot 10^3}{7272,013} \cdot (-15,1) = -139,12\ MPa$

7- Représentation des contraintes :



LES CHARGES REPARTIES

Rep. Ex 9-

1- Pour calculer les réactions des appuis simples, il faut appliquer le PFS :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{q} \cdot \ell = \vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oy: A + B - q \cdot \ell = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/A} F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/A} \vec{A}} + \overrightarrow{M_{/A} \vec{B}} + \overrightarrow{M_{/A} \vec{q} \cdot \ell} = \vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oz: 0 + \|\vec{B}\| \cdot \ell - q \cdot \frac{\ell^2}{2} = 0$$

Donc : $\|\vec{B}\| = q \cdot \frac{\ell}{2} = 300 \cdot 1,5 = 450\ N$ et $\|\vec{A}\| = q \cdot \ell - \|\vec{B}\| = 300 \cdot 3 - 450 = 450\ N$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

➢ Zone AB : $0 \le x \le 3$;

◆ $T_y = -[A - q \cdot x] = -[450 - 300 \cdot x]$ (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x = 0;\ T_y = -450\ N \\ x = 3;\ T_y = 450\ N \end{cases}$

◆ $M_{fGz} = -\left[-A \cdot x + q \cdot \frac{x^2}{2}\right] = -\left[-450 \cdot x + 300 \cdot \frac{x^2}{2}\right]$ (Équation d'une parabole) $si \begin{cases} x = 0; M_{fGz} = 0\ Nm \\ x = 3; M_{fGz} = 0\ Nm \end{cases}$

$M'_{fGz} = -[-A + q \cdot x] = -[-450 + 300 \cdot x] = 0$

$\Rightarrow x = \frac{450}{300} = 1,5\ m \Rightarrow \begin{cases} T_y(1,5) = 0 \\ M_{fGz}(1,5) = 337,5\ Nm \end{cases}$

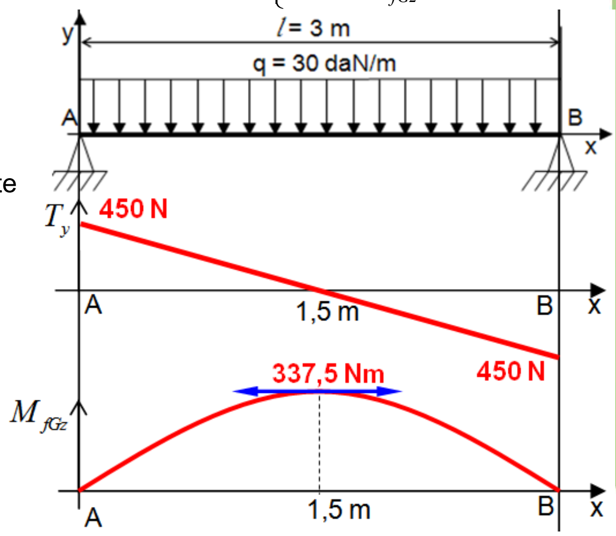
Valeur max de la courbe M_{fGz} ; dans ce point il ya une tangente horizontale

Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Échelle ◆ des forces : 1 mm ⟶ 50 N

◆ des moments : 1 mm ⟶ 25 N.m

Voir les graphes :



Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!

Rep. Ex 10-

1- Les réactions des appuis simples, appliquer le PFS :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{q}\cdot\ell=\vec{0} \text{ et } proj/oy: A+B-C-q\cdot\ell=0$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/A}F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/A}\vec{A}}+\overrightarrow{M_{/A}\vec{B}}+\overrightarrow{M_{/A}\vec{C}}+\overrightarrow{M_{/A}\vec{q}\cdot\ell}=\vec{0} \text{ et } proj/oz: 0+\|\vec{B}\|\cdot\ell-C\cdot a-q\cdot\frac{\ell^2}{2}=0$$

Donc : $\|\vec{B}\|=C\cdot\frac{a}{\ell}+q\cdot\frac{\ell}{2}=1200\cdot\frac{2}{3}+300\cdot1,5=1250\ N$ et $\|\vec{A}\|=C+q\cdot\ell-\|\vec{B}\|=1200+300\cdot3-1250=850\ N$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

➢ Zone AC : $0\le x\le 2$;

◆ $T_y=-[A-q\cdot x]=-[850-300\cdot x]$ (Équation d'une droite) $si\begin{cases}x=0;\ T_y=-850\ N\\ x=2;\ T_y=-250\ N\end{cases}$

◆ $M_{fGz}=-\left[-A\cdot x+q\cdot\frac{x^2}{2}\right]=-\left[-850\cdot x+300\cdot\frac{x^2}{2}\right]$ (Équation d'une parabole) $si\begin{cases}x=0; M_{fGz}=0\ Nm\\ x=2; M_{fGz}=1100\ Nm\end{cases}$

$$M'_{fGz}=-[-A+q\cdot x]=-[-850+300\cdot x]=0 \Rightarrow x=\frac{850}{300}=2,83\ m\Rightarrow\begin{cases}T_y(2,83)=0\\ M_{fGz}(2,83)=1204,165\ Nm\end{cases}$$

Valeur max de la courbe M_{fGz} ; dans ce point il ya une tangente horizontale

➢ Zone CB : $2\le x\le 3$;

◆ $T_y=+[B-q\cdot(3-x)]=+[1250-300\cdot(3-x)]$ (Équation d'une droite) $si\begin{cases}x=2;\ T_y=950\ N\\ x=3;\ T_y=1250\ N\end{cases}$

◆ $M_{fGz}=+\left[B\cdot(3-x)-q\cdot\frac{(3-x)^2}{2}\right]=+\left[1250\cdot(3-x)-300\cdot\frac{(3-x)^2}{2}\right]$ (Équation d'une parabole)

$si\begin{cases}x=2; M_{fGz}=1100\ Nm\\ x=3; M_{fGz}=0\end{cases}$

$$M'_{fGz}=+[-B+q\cdot x]=+[-1250+300\cdot(3-x)]=0$$

$$\Rightarrow x=3-\frac{1250}{300}=-1,16\ m\Rightarrow\begin{cases}T_y(-1,16)=0\\ M_{fGz}(-1,16)=2604,16\ Nm\end{cases}$$

Valeur max de la courbe M_{fGz} ;

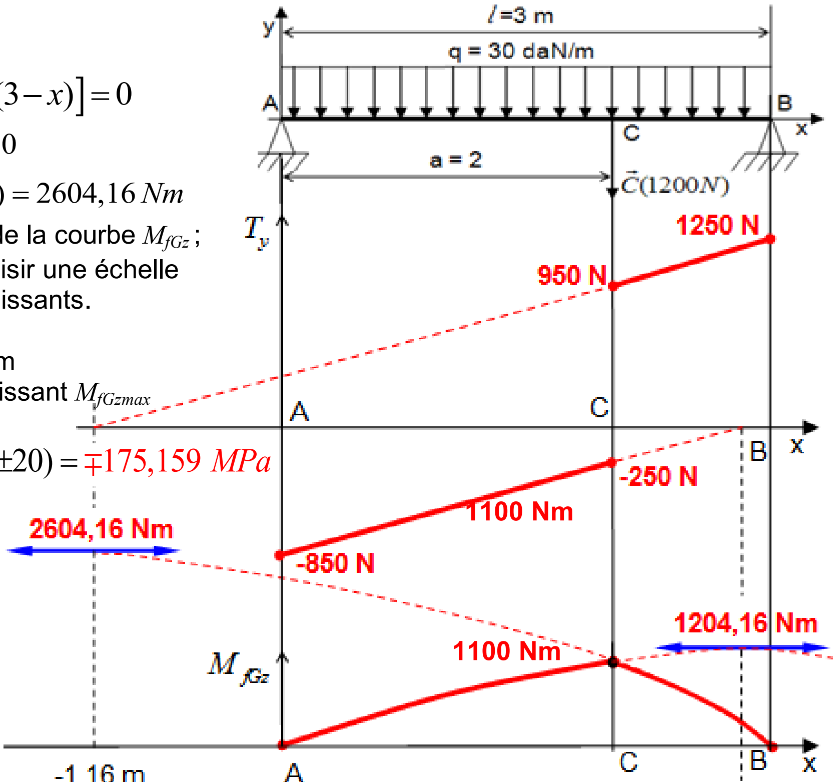
Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.

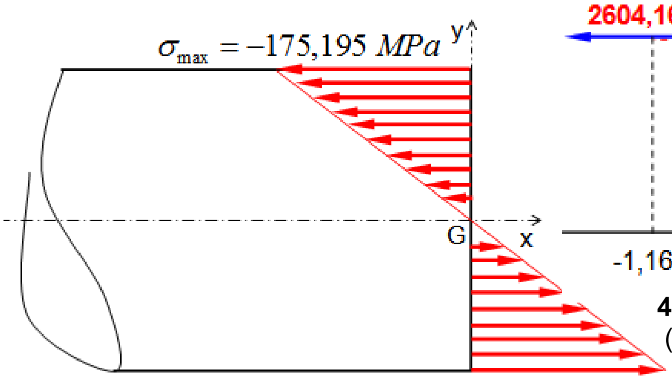
Échelle ◆ des forces : 1 mm ⟶ 50 N

◆ des moments : 1 mm ⟶ 100 N.m

3- Contrainte normale due au moment fléchissant M_{fGzmax}

$$\sigma_{max}=-\frac{M_{fGzmax}}{I_{Gz}}\cdot(\pm y)=-\frac{64\cdot1100\cdot10^3}{\pi\cdot40^4}\cdot(\pm20)=\mp175,159\ MPa$$





4- Représentation des contraintes :
(1 cm ⟶ 68 Mpa)

Rep. Ex 11-

1- Les réactions des appuis simples, appliquer le PFS :

$$\sum \vec{F_{ext}} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{q}\cdot\frac{\ell}{2} = \vec{0} \text{ et } proj/oy : A + B - C - q\cdot\frac{\ell}{2} = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/A}\vec{F}_{ext}} = \overrightarrow{M_{/A}\vec{A}} + \overrightarrow{M_{/A}\vec{B}} + \overrightarrow{M_{/A}\vec{C}} + \overrightarrow{M_{/A}\vec{q}\cdot\frac{\ell}{2}} = \vec{0} \text{ et } proj/oz : 0 + \|\vec{B}\|\cdot\ell - C\cdot\frac{\ell}{2} - q\cdot\frac{\ell^2}{8} = 0$$

Donc : $\|\vec{B}\| = C\cdot\frac{1}{2} + q\cdot\frac{\ell}{8} = 1260\cdot\frac{1}{2} + 800\cdot\frac{4}{8} = 1030\ N$ et $\|\vec{A}\| = C + q\cdot\frac{\ell}{2} - \|\vec{B}\| = 1260 + 800\cdot 2 - 1030 = 1830\ N$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

➢ Zone AC : $0 \le x \le 2$;

- $T_y = -[A - q\cdot x] = -[1830 - 800\cdot x]$ (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x = 0;\ T_y = -1830\ N \\ x = 2;\ T_y = -230\ N \end{cases}$
- $M_{fGz} = -\left[-A\cdot x + q\cdot\frac{x^2}{2}\right] = -\left[-1830\cdot x + 800\cdot\frac{x^2}{2}\right]$ (Équation d'une parabole) $si \begin{cases} x = 0;\ M_{fGz} = 0\ Nm \\ x = 2;\ M_{fGz} = 2060\ Nm \end{cases}$

$$M'_{fGz} = -[-A + q\cdot x] = -[-1830 + 800\cdot x] = 0 \Rightarrow x = \frac{1830}{800} = 2{,}2875\ m \Rightarrow \begin{cases} T_y(2{,}2875) = 0 \\ M_{fGz}(2{,}2875) = 2093{,}0625\ Nm \end{cases}$$

Valeur max de la courbe M_{fGz} ; dans ce point il ya une tangente horizontale

➢ Zone CB : $2 \le x \le 4$;

- $T_y = +[B] = 1030\ N$
- $M_{fGz} = +[1030\cdot(4 - x)];\ si \begin{cases} x = 2;\ M_{fGz} = 2060\ Nm \\ x = 4;\ M_{fGz} = 0 \end{cases}$

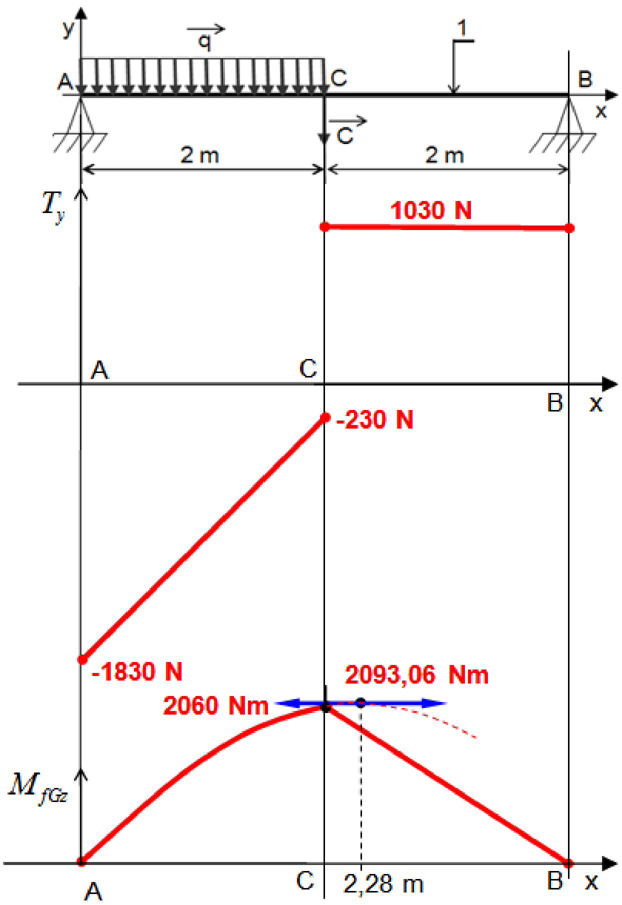
3- Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Échelle ◆ des forces : 1 mm ⟶ 50 N
◆ des moments : 1 mm ⟶ 100 N.m

Voir les graphes :

$|T_y|_{max} = 1830\ N$; au point A

$|M_{fGz}|_{max} = 2060\ Nm$; au point C



3- Contrainte normale due au moment fléchissant M_{fGzmax}

$$\|\vec{\sigma}\|_{max} = \frac{\|\overrightarrow{M_{fGz}}\|_{max}}{I_{Gz}}\cdot y_{max} = \frac{2060\cdot 10^3}{\frac{30\cdot 60^3}{12}}\cdot 30 = 114{,}44\ MPa$$

Rep. Ex 12-

1- Les réactions des appuis simples, appliquer le PFS :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{A} + \vec{D} + \vec{B} + \vec{q}\cdot 1,5 = \vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oy : A + D - B - q\cdot 1,5 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/A}F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/A}\vec{A}} + \overrightarrow{M_{/A}\vec{D}} + \overrightarrow{M_{/A}\vec{B}} + \overrightarrow{M_{/A}\vec{q}\cdot 1,5} = \vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oz : 0 + \|\vec{D}\|\cdot 2 - B\cdot 1 - q\cdot\frac{1,5^2}{2} = 0$$

Donc : $\|\vec{D}\| = B\cdot\frac{1}{2} + q\cdot\frac{1,5^2}{4} = 2166\cdot\frac{1}{2} + 1200\cdot\frac{1,5^2}{4} = 1758\ N$ et $\|\vec{A}\| = 2166 + 1200\cdot 1,5 - 1758 = 2208\ N$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

➢ Zone AB : $0 \le x \le 1$;

♦ $T_y = -[A - q\cdot x] = -[2208 - 1200\cdot x]$ (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x=0;\ T_y = -2208\ N \\ x=1;\ T_y = -1008\ N \end{cases}$

♦ $M_{fGz} = -\left[-A\cdot x + q\cdot\frac{x^2}{2}\right] = -\left[-2208\cdot x + 1200\cdot\frac{x^2}{2}\right]$ (Équation d'une parabole) $si \begin{cases} x=0; M_{fGz} = 0\ Nm \\ x=2; M_{fGz} = 1608\ Nm \end{cases}$

$$M'_{fGz} = -[-A + q\cdot x] = -[-2208 + 1200\cdot x] = 0 \Rightarrow x = \frac{2208}{1200} = 1,84\ m \Rightarrow \begin{cases} T_y(1,84) = 0 \\ M_{fGz}(1,84) = 2031,36\ Nm \end{cases}$$

Valeur max de la courbe M_{fGz} ; dans ce point il ya une tangente horizontale

➢ Zone BC : $1 \le x \le 1,5$;

♦ $T_y = -[A - B - q\cdot x] = -[42 - 1200\cdot x]$ (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x=1;\ T_y = 1158\ N \\ x=1,5;\ T_y = 1758\ N \end{cases}$

♦ $M_{fGz} = -\left[-A\cdot x + B\cdot(x-1) + q\cdot\frac{x^2}{2}\right]$ (Équation d'une parabole) $si \begin{cases} x=1; M_{fGz} = 1608\ Nm \\ x=1,5; M_{fGz} = 879\ Nm \end{cases}$

$$M'_{fGz} = -[-A + B\cdot x + q\cdot x] = -[-42 + 1200\cdot x] = 0 \Rightarrow x = \frac{42}{1200} = 0,035\ m \Rightarrow \begin{cases} T_y(0,035) = 0 \\ M_{fGz}(0,035) = 2166,735\ Nm \end{cases}$$

Valeur max de la courbe M_{fGz} ; dans ce point il ya une tangente horizontale

➢ Zone CD : $1,5 \le x \le 2$;

♦ $T_y = +[D] = 1758\ N$

♦ $M_{fGz} = +[D\cdot(2-x)] = [1758\cdot(2-x)]$

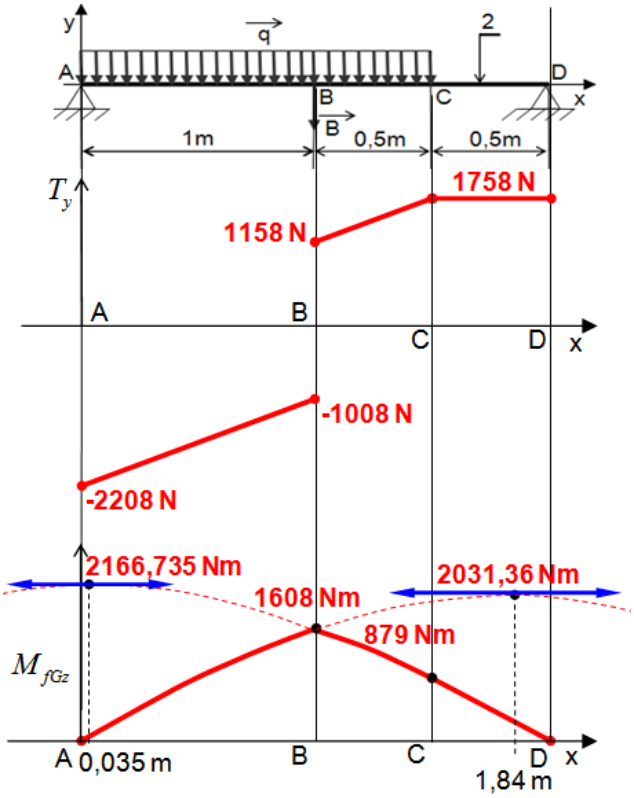
$si \begin{cases} x=1,5; M_{fGz} = 879\ Nm \\ x=2; M_{fGz} = 0\ Nm \end{cases}$

3- Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Échelle ♦ des forces : 1 mm ⟶ 100 N

♦ des moments : 1 mm ⟶ 100 N.m

Voir les graphes :



4- $|T_y|_{max} = 2208\ N$ au point A

$|M_{fGz}|_{max} = 1608\ Nm$ au point B

5- Contrainte normale due au moment fléchissant M_{fGz} :

$$\|\overrightarrow{\sigma_x}\|_{max} = \frac{\|M_{fGz}\|_{max\,i}}{I_{Gz}}\cdot y_{max}$$

$$\|\overrightarrow{\sigma_x}\|_{max} = \frac{1608\cdot 10^3\cdot 12}{50\cdot 125^3 - 44\cdot 119^3}\cdot 62,5 = 51,2989\ MPa$$

Rep. Ex 13-

1- Les réactions des appuis simples, appliquer le PFS :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}+\vec{D}+\vec{q}\cdot\ell=\vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oy: A+B+C+D+q\cdot\ell=0$$

$$\sum \overrightarrow{M_{/A}F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/A}A}+\overrightarrow{M_{/A}B}+\overrightarrow{M_{/A}C}+\overrightarrow{M_{/A}D}+\overrightarrow{M_{/A}q}\cdot\ell=\vec{0}$$

et $proj/oz: 0+\|\vec{B}\|\cdot 0,5 - C\cdot 0,2 + D\cdot 0,7 + q\cdot\dfrac{0,5^2}{2}=0$

La réaction est portée par l'axe $-\vec{y}$

Donc : $\|\vec{B}\| = C\cdot 0,4 - D\cdot 1,4 - q\cdot 0,5^2 = 200\cdot 0,4 - 200\cdot 1,4 - 100\cdot 0,5^2 = -\,225\ N$

La réaction est portée par l'axe $-\vec{y}$

et $\|\vec{A}\| = -B - C - D - q\cdot\ell = 225-200-200-50 = -\,225\ N$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

- Zone CA : $0 \le x \le 0,2$;
  - $T_y = -[C] = -200\ \ N$
  - $M_{fGz} = -[-C\cdot x] = -[-200\cdot x]$ (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x=0; M_{fGz}=0\ Nm \\ x=0,2; M_{fGz}=40\ Nm \end{cases}$
- Zone AB : $0,2 \le x \le 0,7$;
  - $T_y = -[C - A + q\cdot(x-0,2)] = -[200-225+100\cdot(x-0,2)]$ (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x=0,2;\ T_y=25\ N \\ x=0,7;\ T_y=-25\ N \end{cases}$
  - $M_{fGz} = -\left[-C\cdot x + A(x-0,2) - q\cdot\dfrac{(x-0,2)^2}{2}\right] = -\left[-200\cdot x + 225(x-0,2) - 100\cdot\dfrac{(x-0,2)^2}{2}\right]$

  (Équation d'une parabole) $si \begin{cases} x=0,2; M_{fGz}=40\ Nm \\ x=0,7; M_{fGz}=40\ Nm \end{cases}$

  $$M'_{fGz} = -[-C + A - q\cdot(x-0,2)] = -[45-100\cdot x] = 0 \Rightarrow x=\frac{45}{100}=0,45\ m \Rightarrow \begin{cases} T_y(0,45)=0 \\ M_{fGz}(0,45)=36,875\ Nm \end{cases}$$

  Valeur max de la courbe M_{fGz} ; dans ce pointil ya une tangente horizontale
- Zone BD : $0,7 \le x \le 0,9$;
  - $T_y = +[D] = 200\ \ N$ et ♦ $M_{fGz} = +[D\cdot(0,9-x)] = [200\cdot(0,9-x)]$

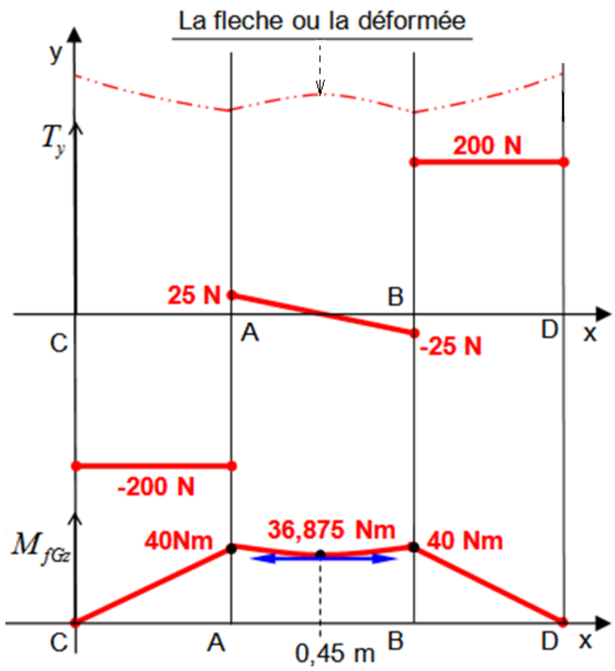
  (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x=0,7; M_{fGz}=40\ Nm \\ x=0,9; M_{fGz}=0\ Nm \end{cases}$

3- Pour la représentation graphique, il faut choisir une échelle des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Échelle ♦ des forces : 1 mm ⟶ 10 N

♦ des moments : 1 mm ⟶ 4 N.m

Voir les graphes :



4- $|T_y|_{max} = 200\ N$ dans la zone CA et BD

$|M_{fGz}|_{max} = 40\ Nm$ au point A et B

5- Voir le diagramme.

6- Contrainte normale due au moment fléchissant M_{fGz} :

$$\|\overrightarrow{\sigma_x}\|_{max} = \frac{\|M_{fGz}\|_{max\,i}}{I_{Gz}}\cdot y_{max}$$

$$\|\overrightarrow{\sigma_x}\|_{max} = \frac{40\cdot 10^3\cdot 12}{2\cdot 10\cdot 80^3+80\cdot 8^3}\cdot 40 = 1,87\ MPa$$

Rep. Ex 14- **POUTRES ENCASTRÉES avec CHARGES REPARTIES**

1- Les réactions des appuis simples, appliquer le PFS :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{H} + \vec{P} + \vec{q}\cdot 4,5 = \vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oy : H - P - q\cdot 4,5 = 0$$

Donc : $\|\vec{H}\| = P + q\cdot 4,5 = 10^3 + 42\cdot 4,5 = 1189\ daN$

$$\sum \overrightarrow{M_{/H}F_{ext}} = \overrightarrow{M_{/H}\vec{H}} + \overrightarrow{M_{/H}\vec{P}} + \overrightarrow{M_{/H}\vec{q}\cdot 4,5} + \overrightarrow{M_H} = \vec{0} \quad \text{et} \quad proj/oz : 0 - P\cdot 3 - q\cdot\frac{4,5^2}{2} + M_H = 0$$

Donc : $M_H = P\cdot 3 + q\cdot\frac{4,5^2}{2} = 3\cdot 10^3 + 42\cdot\frac{4,5^2}{2} = 3425,25\ daNm$

2- Les efforts tranchants T_y et les moments fléchissants M_{fGz} :

➢ Zone HC : $0 \le x \le 3$;

- $T_y = -[H - q\cdot x] = -[1189 - 42\cdot x]$ (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x=0;\ T_y = -1189\ daN \\ x=3;\ T_y = -1063\ daN \end{cases}$

- $M_{fGz} = -\left[-H\cdot x + q\cdot\frac{x^2}{2} + M_H\right] = -\left[-1189\cdot x + 42\cdot\frac{x^2}{2} + 3425,25\right]$

(Équation d'une parabole) $si \begin{cases} x=0; M_{fGz} = -3425,25\ daNm \\ x=3; M_{fGz} = -47,25\ daNm \end{cases}$

$$M'_{fGz} = -[-H + q\cdot x] = -[-1189 + 42\cdot x] = 0 \Rightarrow x = \frac{1189}{42} = 28,30\ m \Rightarrow \begin{cases} T_y(28,30) = 0 \\ M_{fGz}(28,30) = 13404,76\ daNm \end{cases}$$

Valeur max de la courbe M_{fGz} ; dans ce point il ya une tangente horizontale

➢ Zone CB : $3 \le x \le 4,5$;

- $T_y = +[-q\cdot(4,5-x)] = +[-42\cdot(4,5-x)]$ (Équation d'une droite) $si \begin{cases} x=3;\ T_y = -63\ daN \\ x=4,5;\ T_y = 0\ daN \end{cases}$

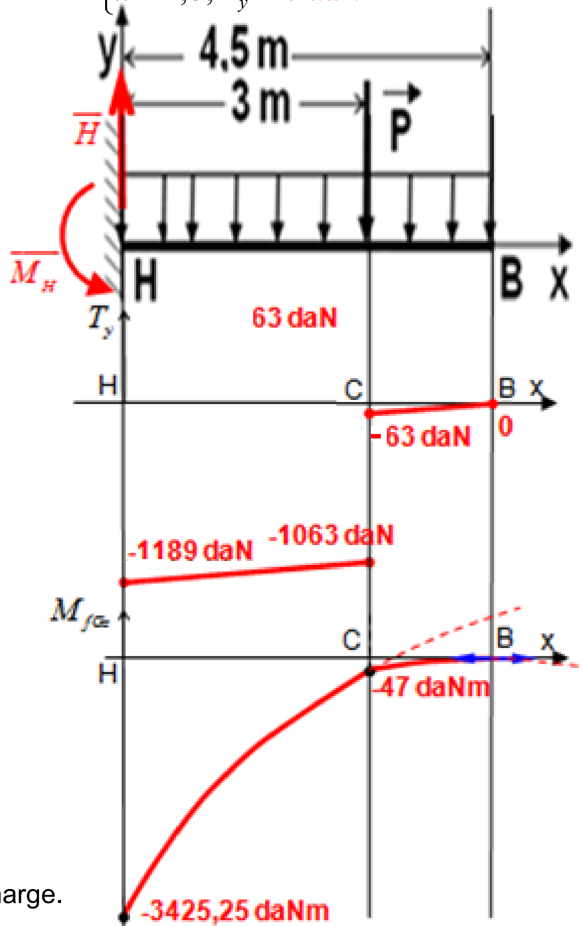
- $M_{fGz} = +\left[-q\cdot\frac{(4,5-x)^2}{2}\right] = +\left[-42\cdot\frac{(4,5-x)^2}{2}\right]$

(Équation d'une parabole) $si \begin{cases} x=3; M_{fGz} = -47,25\ daNm \\ x=4,5; M_{fGz} = 0\ daNm \end{cases}$

$$M'_{fGz} = [+q\cdot(4,5-x)] = [42\cdot(4,5-x)] = 0$$

$$\Rightarrow x = 4,5\ m \Rightarrow \begin{cases} T_y(4,5) = 0 \\ M_{fGz}(4,5) = 0 \end{cases}$$

Valeur max de la courbe M_{fGz} ; dans ce point il ya une tangente horizontale



3- vérification de la poutre :

$$\left\|\overrightarrow{\sigma_x}\right\|_{max} = \frac{\left\|M_{fGz}\right\|_{max\,i}}{I_{Gz}}\cdot y_{max} \le Rpe$$

$$\left\|\overrightarrow{\sigma_x}\right\|_{max} = \frac{\left|M_{fGz}\right|_{max}\cdot 12}{b\cdot H^3 - (b-a)(H-2e)^3}\cdot\frac{H}{2}$$

$$\left\|\overrightarrow{\sigma_x}\right\|_{max} = \frac{34252,5\cdot 10^3\cdot 12}{150\cdot 300^3 - (150-7)(300-22)^3}\cdot 150$$

$$\left\|\overrightarrow{\sigma_x}\right\|_{max} = 63,063\ MPa \le 100$$

La poutre résiste mieux à cette charge.