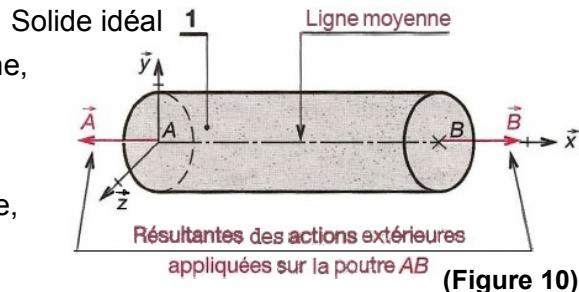


## TRACTION SIMPLE

### I- HYPOTHÈSES :

- ◆ **Solide idéal** : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne, de section constante.
- ◆ **Les actions extérieures** dans les sections extrêmes sont modélisables par deux résultantes  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  appliquées aux barycentres de ces sections, dirigées selon la ligne moyenne, (orientées vers l'extérieur de la poutre) (**Figure 10**).

$$\{A_{1/1}\}_A = \{\vec{A}\}_A \text{ et } \{B_{1/1}\}_B = \{\vec{B}\}_B$$



(Figure 10)

### II- DÉFINITION : (Figure 11).

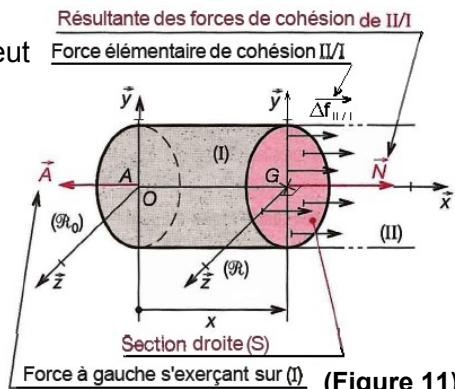
Une poutre est sollicitée à la traction si, le torseur associe aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en  $\mathbf{G}$ , (barycentre de la section droite (S)) à une **résultante perpendiculaire** à (S), dirigée vers l'extérieur de la matière, telle que :

$$N \neq 0; T_y = 0; T_z = 0; \text{ et } M_t = 0; M_{fGy} = 0; M_{fgz} = 0$$

d'où  $\{Coh_{II/I}\}_G = \{\vec{N}\}_G$  et ( $N > 0$ )

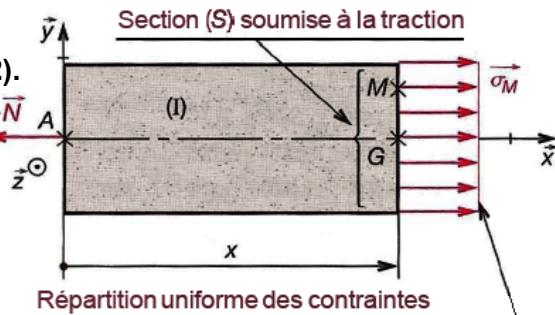
► **Remarque** :  $\{Coh_{II/I}\}_G = -\{\text{Action ext.à gauche /}_I\}_G = -\{\vec{A}\}_G$   
 $= +\{\text{Action ext.à droite /}_{II}\}_G = \{\vec{B}\}_G$

donc :  $\vec{N} = -\vec{A}; \vec{N} = \vec{B}$  et  $\vec{M}_G = \vec{0}$



(Figure 11)

Répartition des contraintes dans (S)



(Figure 12)

avec :  $\sigma_M$  : Contrainte normale en un point M (MPa), ( $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2 = 10 \text{ bars} = 10^6 \text{ Pa}$ )

N : Effort normal (en N) ;

S : aire de la section droite soumise à la traction ( $\text{mm}^2$ )

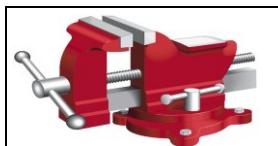
### Démonstration

$$\vec{N} + \int_s \overrightarrow{df_{II/I}} = \vec{0} \quad \text{avec } (\int_s \overrightarrow{df_{II/I}} = \sum_s \Delta \overrightarrow{df_{II/I}})$$

$$\text{proj/ox} : -N + \int_s \overrightarrow{df_{II/I}} = 0 \quad ; \quad \text{or} : \overrightarrow{C_{(M),n}} = \frac{\overrightarrow{df_{II/I}}}{ds} = \sigma_M \cdot \vec{n} + \tau_M \cdot \vec{t}$$

$$\overrightarrow{df_{II/I}} = \sigma_M \cdot \vec{n} \cdot ds \quad \text{d'où} : -N + \sigma_M \int_s ds = 0$$

$$-N + \sigma_M \cdot S = 0 \quad ; \quad \text{donc} : \boxed{\sigma_M = \frac{N}{S}} \quad \text{avec} \quad N > 0; \sigma_M > 0$$



## IV- ÉTUDE DES DÉFORMATION : (Figure 13).

### a- Essai de traction :

La machine de traction permet d'appliquer très progressivement et sans choc un effort de traction  $\vec{F}$  ; afin d'étudier les allongements  $\Delta l$  de l'éprouvette :

♦ Porter en ordonnée la valeur de l'**effort unitaire  $R$**

(ou contrainte de traction  $\sigma$ ) en (MPa).

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

♦ Porter en abscisse la valeur de l'allongement unitaire  $\varepsilon_x$  :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \ell}{\ell_0}$$

### Étude de la courbe

♦ **La zone OA** : l'éprouvette a une déformation élastique.

L'allongement unitaire est proportionnel à l'effort appliquéd.

Dès que  $\sigma$  est supprimé, l'éprouvette reprend sa longueur initiale  $\ell_0$ .

On reste dans cette zone tant que  $\sigma < R_e$  avec  $R_e = F_e / S_0$

♦ **La zone AD** :  $\sigma > R_e$  : l'éprouvette a une déformation **plastique**

ou **permanente**. L'allongement unitaire n'est plus proportionnel à l'effort unitaire appliquéd. Lorsque  $\sigma$  est supprimé, l'éprouvette ne reprend pas sa longueur  $\ell_0$ .

De A à C : l'éprouvette s'allonge et reste cylindrique.

De C à D : l'allongement continue de croître avec un effort  $F_2$  moins important. Il apparaît un **étranglement**, ou **striction**, qui s'accentue jusqu'à la rupture en D.

Après rupture, l'éprouvette a pour longueur  $\ell_u$ .

On définit l'allongement en %.

$$A\% = \frac{\ell_u - \ell_0}{\ell_0} \times 100 ; \text{ pour les aciers } 0\% < A\% < 30\%$$

### b- Déformation d'une poutre dans le domaine élastique :

↳ **Déformation longitudinale** (voir la courbe zone OA)

La contrainte  $\sigma = \frac{F}{S_0}$  varie linéairement en fonction de

l'allongement unitaire  $\varepsilon_x$ .

Loi de Hooke  $\sigma = E \cdot \varepsilon_x$  et  $\frac{N}{S_0} = \frac{E \cdot \Delta l}{l_0}$  donc :  $\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot S_0}$  avec :

$\sigma$  : contrainte normale de traction (en MPa) ;

$E$  : module d'élasticité longitudinale ou d'Young en (MPa), (pour les aciers  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa) ;

$\varepsilon_x$  : allongement unitaire ;  $\Delta l$  : allongement de la poutre en (mm) ;  $l_0$  : longueur initiale de la poutre en (mm) ;

$N$  : effort normal en (N) ;  $S_0$  : section droite initiale en ( $\text{mm}^2$ ).

↳ **Déformation transversale** (Figure 14).

Lorsqu'une poutre s'allonge dans la direction longitudinale sous l'effet de  $N$ , on observe une contraction dans la direction transversale ; on écrit :  $\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x$  avec :

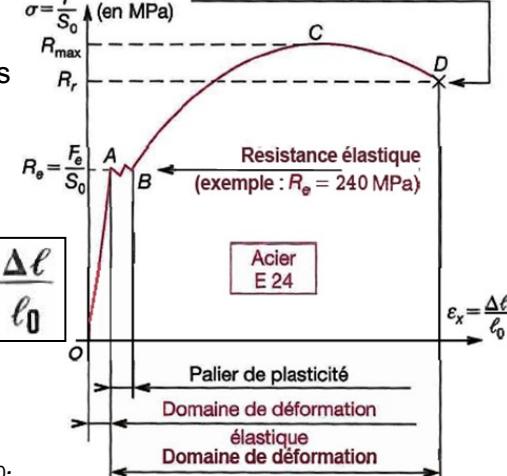
$$\varepsilon_x = \frac{l_1 - l_0}{l_0} ; \text{ Allongement unitaire suivant } \overrightarrow{ox} ;$$

$$\varepsilon_y = \frac{h_1 - h_0}{h_0} ; \text{ Contraction (ou raccourcissement) suivant } \overrightarrow{oy} ;$$

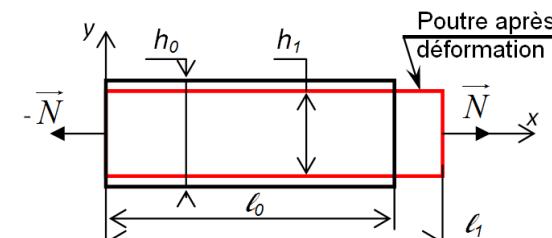
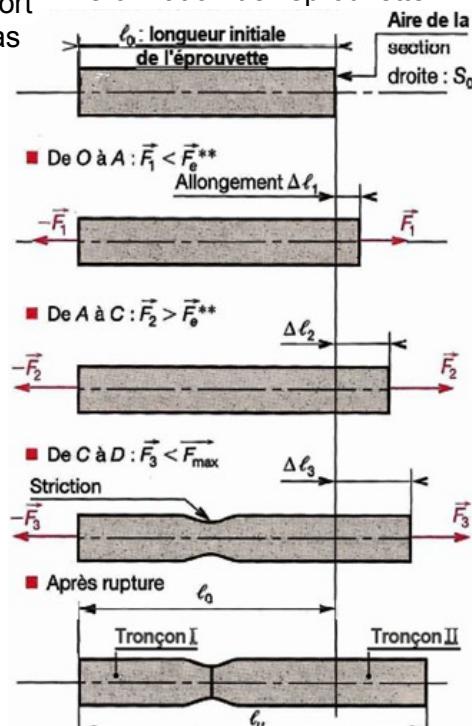
$\nu$  : Coefficient de Poisson (selon les matériaux  $0,1 \leq \nu \leq 0,5$ ),  
(pour les aciers  $\nu = 0,3$ ).

Courbe caractéristique de l'essai

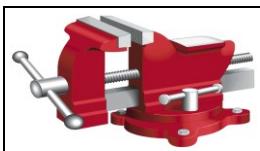
Résistance à la rupture :  $R_r$



Déformation de l'éprouvette



(Figure 14)



## V- CONDITION DE RÉSISTANCE :

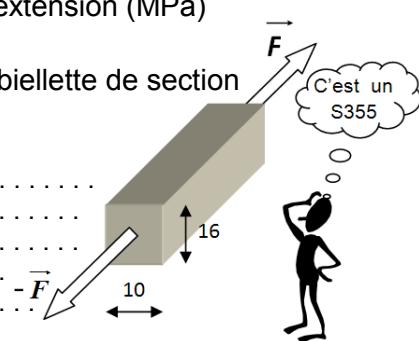
Pour des raisons de **sécurité**, la contrainte normale doit rester inférieure à la **résistance pratique** à l'**extension Rpe**. La condition de résistance est :

$$|\sigma| \leq Rpe \text{ ou } \frac{|N|}{S} \leq Rpe \quad \text{avec} \quad Rpe = \frac{Re}{s}$$

Re : Résistance élastique à l'extension (MPa)  
s : coefficient de sécurité.

Exemple : Pince de levage avec une action F de 3000 N agissant sur une biellette de section rectangulaire de 16 x 10.

Calculez la contrainte normale  $\sigma_n$  dans une section de la biellette puis vérifiez la condition de résistance si  $s = 10$ .



## VI- CONDITION DE DÉFORMATION :

Pour des raisons **fonctionnelles**, il est parfois important de limiter l'allongement.

Il doit rester inférieur à une valeur limite  $\Delta l_{lim}$

$$|\Delta l| \leq \Delta l_{lim} \quad \text{ou} \quad \frac{|N| \cdot l_0}{E \cdot S} \leq \Delta l_{lim}$$

## VII- GÉOMÉTRIE NON PARFAIT : (ou phénomène de concentration de contraintes)

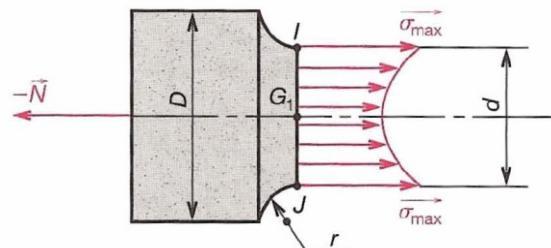
Si le solide présente des variations brusques de section, dans une zone proche de ces variations, la répartition des contraintes n'est plus uniforme, il y a concentration de contrainte. La contrainte maximale est :

$$|\sigma_{max}| = K_t |\sigma_{nom}|; 1 < K_t < 3$$

avec :  $K_t$ : Coefficient de concentration de contrainte de traction ( $K_t$  en fonction de gorge, épaulement...)

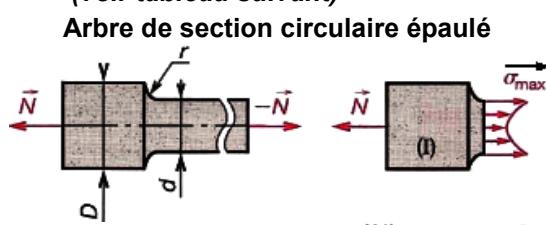
$$\sigma_{nom} : \text{Contrainte normale nominale} = \frac{N}{S}$$

Méthode de calcul d'un solide réel

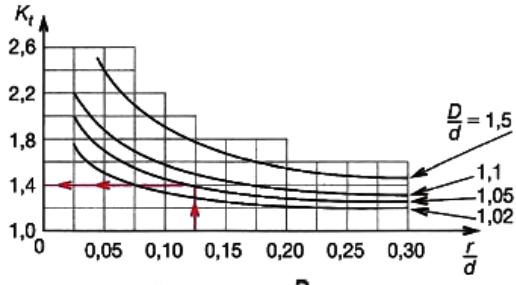


**Coefficient de concentration de contrainte  $K_t$  (voir tableau suivant)**

- 1° Calculer  $|\sigma_{nom}|$
- 2° Analyser la nature de la géométrie, (épaulement, gorge...), section circulaire ou prismatique et choisir la courbe (**voir page suivante**).
- 3° Calculer :  $r/d$ ,  $D/d$ , ou  $h/D$ .
- 4° Déterminer la valeur de  $K_t$  correspondante.
- 5° Calculer  $|\sigma_{max}| = K_t \cdot |\sigma_{nom}|$
- 6° Écrire la condition de résistance :  $|\sigma_{max}| \leq Rpe$

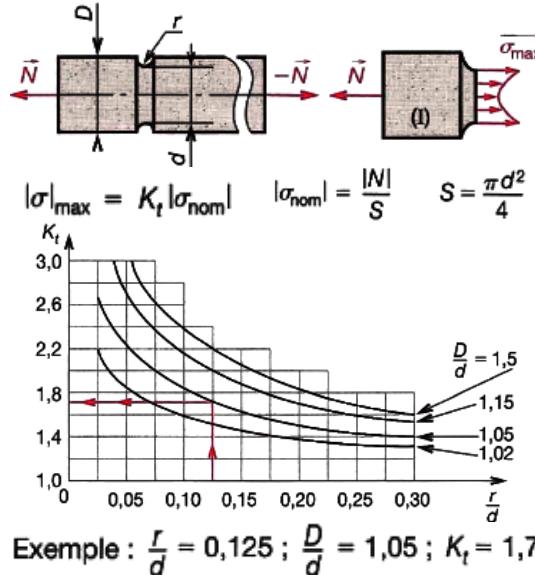


$$|\sigma|_{max} = K_t |\sigma_{nom}| \quad |\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$

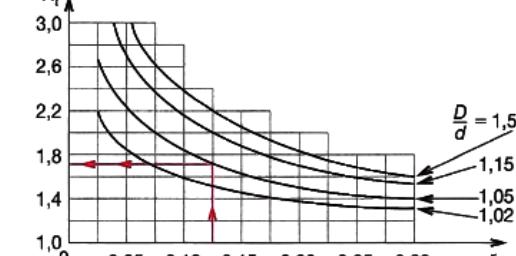


$$\text{Exemple : } \frac{r}{d} = 0,125; \frac{D}{d} = 1,05; K_t = 1,4$$

**Arbre de section circulaire avec gorge**



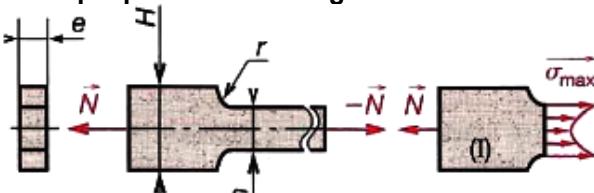
$$|\sigma|_{max} = K_t |\sigma_{nom}| \quad |\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$



$$\text{Exemple : } \frac{r}{d} = 0,125; \frac{D}{d} = 1,05; K_t = 1,7$$

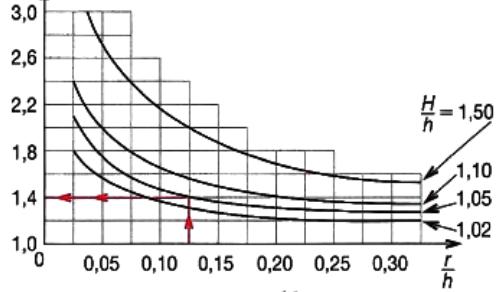


### Plaque plane avec changement de section



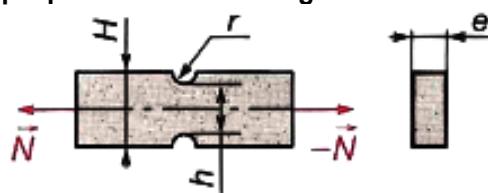
$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}| \quad |\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = h \cdot e$$

$K_t$



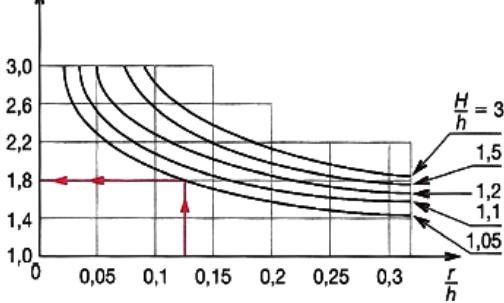
$$\text{Exemple : } \frac{r}{h} = 0,125 ; \frac{H}{h} = 1,05 ; K_t = 1,4$$

### Plaque plane avec deux saignées sur les bords



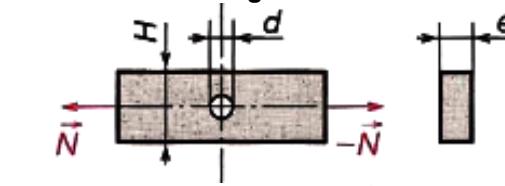
$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}| \quad |\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = h \cdot e$$

$K_t$



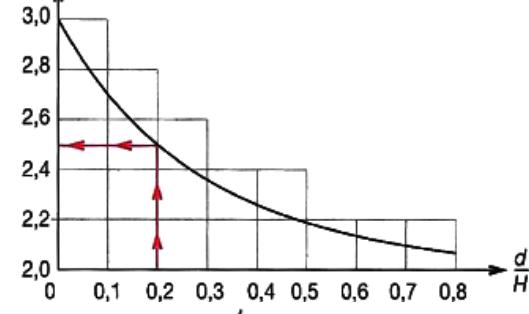
$$\text{Exemple : } \frac{r}{h} = 0,125 ; \frac{H}{h} = 1,05 ; K_t = 1,8$$

### Plaque plane percée d'un trou sur l'axe de symétrie longitudinal



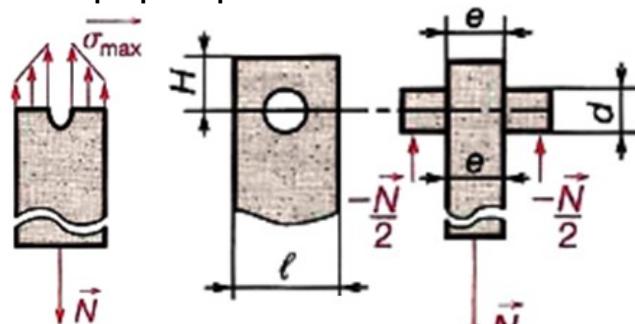
$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}| \quad |\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = (H - d) e$$

$K_t$



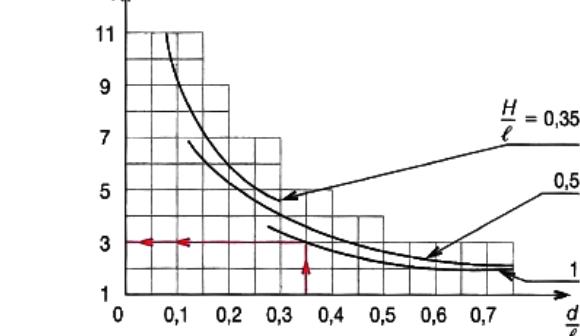
$$\text{Exemple : } \frac{d}{H} = 0,2 ; K_t = 2,5$$

### Plaque plane percée d'un trou à une extrémité



$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}| \quad |\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = (\ell - d) e$$

$K_t$



$$\text{Exemple : } \frac{d}{\ell} = 0,35 ; \frac{H}{\ell} = 1,0 ; K_t = 3$$

### Exemples de valeurs de $\alpha_L$ ( $10^{-6}$ m/m.°C)

Invar (Fe+36%Ni)	1,5	Laiton	18,9
Silicium	3	Nylon (33% fibres de verre)	20
Tungstène	4,5	Magnésium	23
Granite	8,7	Aluminium	25
Verre	9	Plomb	29
Fer	12	Zinc	30
Acier	12	Polyéthylène (33% fibres de verre)	48
Fontes (EN-GJL)	12	Polystyrène	70
Nickel	13	Nylon	80
Cuivre	16	Polyéthylène	100

**Remarque :** Contraintes et déformations d'origine thermique, un changement de température engendre une modification des dimensions des poutres. Si la température augmente, la poutre en général s'allonge (dilatation) et inversement (contraction). Le plus souvent, les dilatations ou contractions varient linéairement avec la température et suivent la loi :

$$\Delta L = \alpha_L \cdot L \cdot \Delta T \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \alpha_L \cdot \Delta T$$

$\Delta L$  : allongement de la poutre (m)

$L$  : longueur initiale de la poutre (m)

$\Delta T$  : accroissement de température (K, °C)

$\alpha_L$  : coefficient de dilatation linéique ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ,  $\text{K}^{-1}$ )

Exemple : une barre en cuivre de 1 m, à 20 °C, est chauffée jusqu'à 200 °C. Déterminons sa longueur finale.

Réponse :  $\Delta L = (16 \times 10^{-6}) \times 1000 \times (200 - 20) = 2,88$

$$\Delta L \approx 2,9 \text{ mm} ; \text{ donc : } L = 1000 + 2,9 = 1002,9 \text{ mm}$$