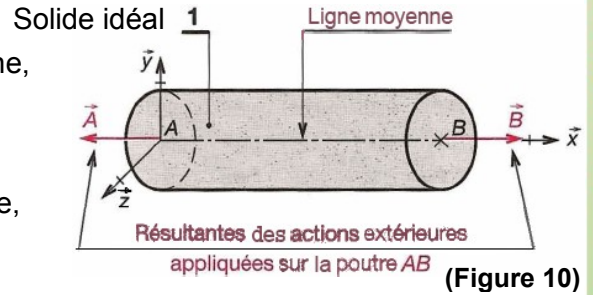


TRACTION SIMPLE

I- HYPOTHÈSES :

- ♦ **Solide idéal** : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne, de section constante.
- ♦ **Les actions extérieures** dans les sections extrêmes sont modélisables par deux résultantes \vec{A} et \vec{B} appliquées aux barycentres de ces sections, dirigées selon la ligne moyenne, (orientées vers l'extérieur de la poutre) (Figure 10).

$$\{A_{i/1}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{A} \\ 0 \end{Bmatrix}_A \quad \text{et} \quad \{B_{i/1}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{B} \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$



(Figure 10)

II- DÉFINITION : (Figure 11).

Une poutre est sollicitée à la traction si, le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en \vec{G} , (barycentre de la section droite (S)) à une **résultante perpendiculaire** à (S), dirigée vers l'extérieur de la matière, telle que :

$$N \neq 0 ; T_y = 0 ; T_z = 0 ; \text{et} M_t = 0 ; M_{fGy} = 0 ; M_{fGz} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \{Coh_{II/I}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G \quad \text{et} \quad (N > 0)$$

⚡ **Remarque** : $\{Coh_{II/I}\}_G = -\{\text{Action ext. à gauche / I}\}_G = -\begin{Bmatrix} \vec{A} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

$$= +\{\text{Action ext. à droite / II}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{B} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\text{donc} : \vec{N} = -\vec{A}; \vec{N} = \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{M}_G = \vec{0}$$

III- CONTRAINTES DANS UNE SECTION DROITE : (Figure 12).

Les contraintes σ_M dans une section droite (S) sont normales à la section et uniformément réparties dans cette dernière.

La valeur de σ_M en un point M de (S) est :

$$\sigma_M = \frac{N}{S}; \quad N > 0 \Rightarrow \sigma_M > 0$$

avec : σ_M : Contrainte normale en un point M (MPa), ($1\text{MPa} = 1\text{N/mm}^2 = 10\text{ bars} = 10^6\text{ Pa}$) (Figure 12)

N : Effort normal (en N) ;

S : aire de la section droite soumise à la traction (mm^2)

Démonstration

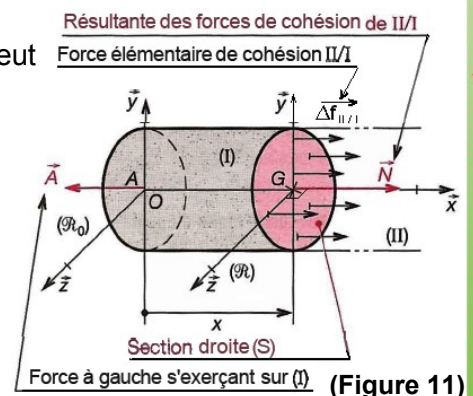
$$\vec{N} + \int_s \vec{df}_{II/I} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \left(\int_s \vec{df}_{II/I} = \sum_s \Delta \vec{df}_{II/I} \right)$$

$$\text{proj}/\vec{ox} : -N + \int_s \vec{df}_{II/I} = 0 \quad ; \quad \text{or} : \vec{C}_{(M).n} = \frac{d\vec{f}_{II/I}}{ds} = \sigma_M \cdot \vec{n} + \tau_M \cdot \vec{t}$$

$$\vec{df}_{II/I} = \sigma_M \cdot \vec{n} \cdot ds \quad \text{d'où} : -N + \sigma_M \int_s ds = 0$$

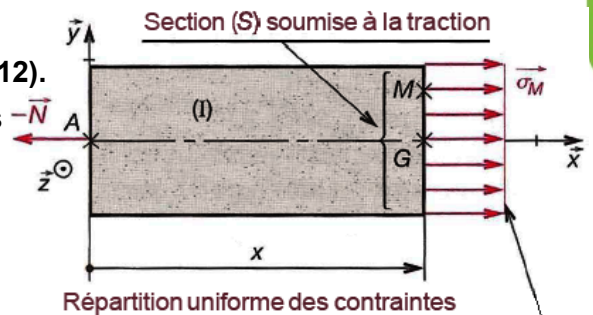
$$-N + \sigma_M \cdot S = 0 \quad ; \quad \text{donc} : \sigma_M = \frac{N}{S} \quad \text{avec} \quad N > 0 ; \sigma_M > 0$$

Isolement d'une partie (I)

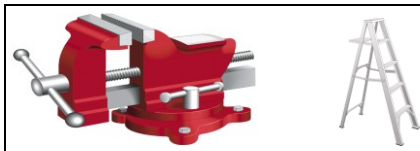


(Figure 11)

Répartition des contraintes dans (S)



(Figure 12)



IV- ÉTUDE DES DÉFORMATION : (Figure 13).

a- Essai de traction :

La machine de traction permet d'appliquer très progressivement et sans choc un effort de traction \vec{F} ; afin d'étudier les allongements Δl de l'éprouvette :

- ♦ Porter en ordonnée la valeur de l'effort unitaire R

(ou contrainte de traction σ) en (MPa).

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

- ♦ Porter en abscisse la valeur de l'allongement unitaire ε_x :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Étude de la courbe

- ♦ **La zone OA** : l'éprouvette a une déformation élastique. L'allongement unitaire est proportionnel à l'effort appliqué. Dès que σ est supprimé, l'éprouvette reprend sa longueur initiale l_0 . On reste dans cette zone tant que $\sigma < R_e$ avec $R_e = F_e / S_0$,

- ♦ **La zone AD** : $\sigma > R_e$: l'éprouvette a une déformation **plastique** ou **permanente**. L'allongement unitaire n'est plus proportionnel à l'effort unitaire appliqué. Lorsque σ est supprimé, l'éprouvette ne reprend pas sa longueur l_0 .

De A à C : l'éprouvette s'allonge et reste cylindrique.

De C à D : l'allongement continue de croître avec un effort F_2 moins important. Il apparaît un **étranglement**, ou **striction**, qui s'accroît jusqu'à la rupture en D.

Après rupture, l'éprouvette a pour longueur l_u .

On définit l'allongement en %.

$$A\% = \frac{l_u - l_0}{l_0} \times 100 ; \text{ pour les aciers } 0\% < A\% < 30\%$$

b- Déformation d'une poutre dans le domaine élastique :

☞ **Déformation longitudinale** (voir la courbe zone OA)

La contrainte $\sigma = \frac{F}{S_0}$ varie linéairement en fonction de

l'allongement unitaire ε_x .

Loi de Hooke $\sigma = E \cdot \varepsilon_x$ et $\frac{N}{S_0} = \frac{E \cdot \Delta l}{l_0}$ donc : $\Delta l = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot S_0}$ avec :

σ : contrainte normale de traction (en MPa) ;

E : module d'élasticité longitudinale ou d'Young en (MPa), (pour les aciers $E = 2 \cdot 10^5$ MPa) ;

ε_x : allongement unitaire ; Δl : allongement de la poutre en (mm) ; l_0 : longueur initiale de la poutre en (mm) ;

N : effort normal en (N) ; S_0 : section droite initiale en (mm²).

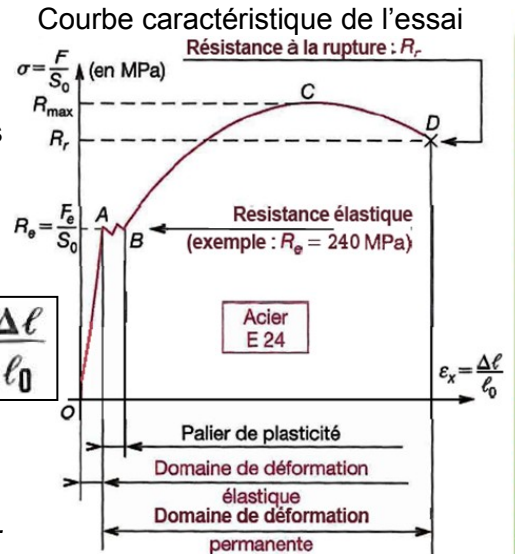
☞ **Déformation transversale** (Figure 14).

Lorsqu'une poutre s'allonge dans la direction longitudinale sous l'effet de N , on observe une contraction dans la direction transversale ; on écrit : $\varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_x$ avec :

$$\varepsilon_x = \frac{l_1 - l_0}{l_0} : \text{Allongement unitaire suivant } \vec{ox} ;$$

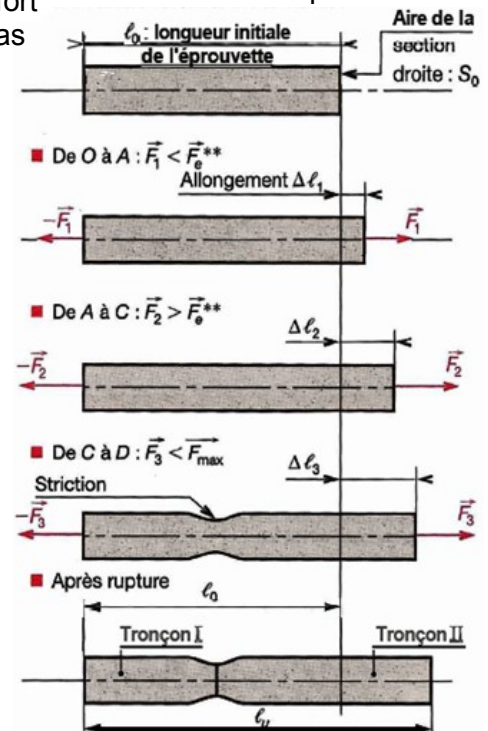
$$\varepsilon_y = \frac{h_1 - h_0}{h_0} : \text{Contraction (ou raccourcissement) suivant } \vec{oy} ;$$

ν : Coefficient de Poisson (selon les matériaux ($0,1 \leq \nu \leq 0,5$), (pour les aciers $\nu = 0,3$).

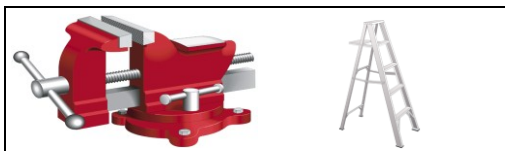


(Figure 13)

Déformation de l'éprouvette



(Figure 14)



V- CONDITION DE RÉSISTANCE :

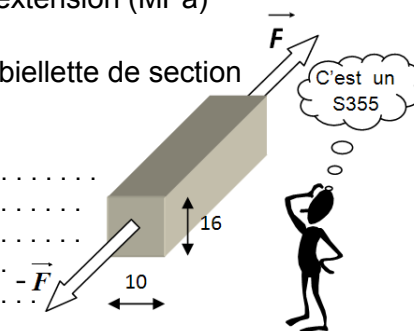
Pour des raisons de **sécurité**, la contrainte normale doit rester inférieure à la **résistance pratique à l'extension Rpe**. La condition de résistance est :

$$|\sigma| \leq Rpe \text{ ou } \frac{|N|}{S} \leq Rpe \text{ avec } Rpe = \frac{Re}{s}$$

Re : Résistance élastique à l'extension (MPa)
s : coefficient de sécurité.

Exemple : Pince de levage avec une action F de 3000 N agissant sur une bielle de section rectangulaire de 16 x 10.

Calculez la contrainte normale σ_n dans une section de la bielle puis vérifiez la condition de résistance si s = 10.



VI- CONDITION DE DÉFORMATION :

Pour des raisons **fonctionnelles**, il est parfois important de limiter l'allongement.

Il doit rester inférieur à une valeur limite Δl_{lim}

$$|\Delta l| \leq \Delta l_{lim} \text{ ou } \frac{|N| \cdot l_0}{E \cdot S} \leq \Delta l_{lim}$$

VII- GÉOMÉTRIE NON PARFAIT : (ou phénomène de concentration de contraintes)

Si le solide présente des variations brusques de section, dans une zone proche de ces variations, la répartition des contraintes n'est plus uniforme, il y a concentration de contrainte. La contrainte maximale est

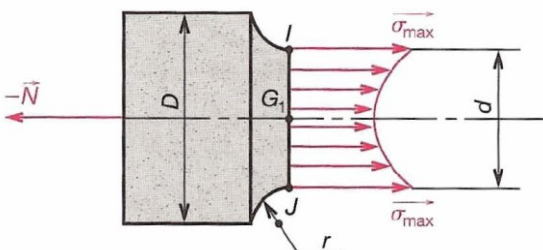
$$|\sigma_{max}| = K_t |\sigma_{nom}| ; 1 < K_t < 3$$

avec : K_t : Coefficient de concentration de contrainte de traction (K_t en fonction de gorge, épaulement...)

σ_{nom} : Contrainte normale nominale = $\frac{N}{S}$

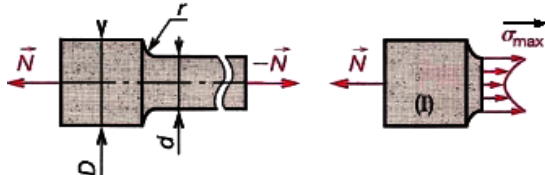
Méthode de calcul d'un solide réel

- 1° Calculer $|\sigma_{nom}|$
- 2° Analyser la nature de la géométrie, (épaulement, gorge...), section circulaire ou prismatique et choisir la courbe (voir page suivante).
- 3° Calculer : r/d, D/d, ou h/D.
- 4° Déterminer la valeur de K_t correspondante.
- 5° Calculer $|\sigma_{max}| = K_t \cdot |\sigma_{nom}|$
- 6° Écrire la condition de résistance : $|\sigma_{max}| \leq Rpe$

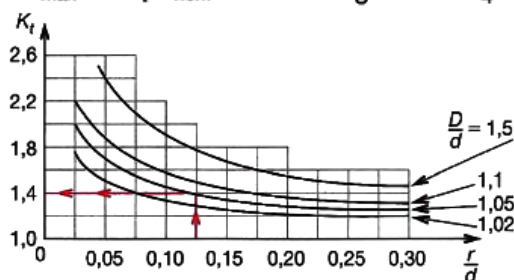


Coefficient de concentration de contrainte K_t
(voir tableau suivant)

Arbre de section circulaire épaulé

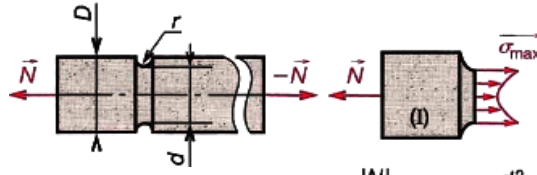


$$|\sigma|_{max} = K_t |\sigma_{nom}| \quad |\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$

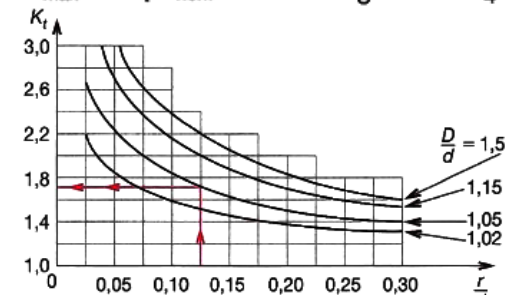


Exemple : $\frac{r}{d} = 0,125$; $\frac{D}{d} = 1,05$; $K_t = 1,4$

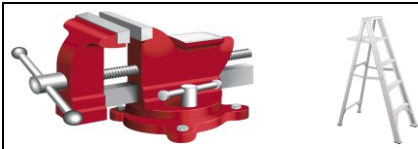
Arbre de section circulaire avec gorge



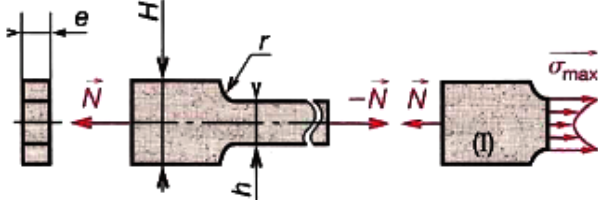
$$|\sigma|_{max} = K_t |\sigma_{nom}| \quad |\sigma_{nom}| = \frac{|N|}{S} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$



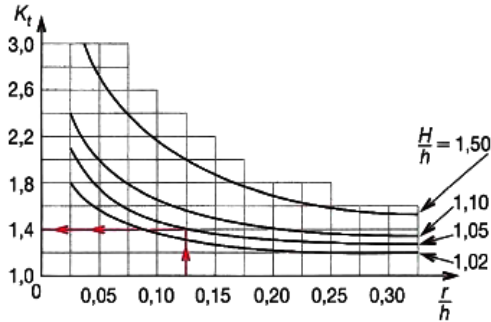
Exemple : $\frac{r}{d} = 0,125$; $\frac{D}{d} = 1,05$; $K_t = 1,7$



Plaque plane avec changement de section

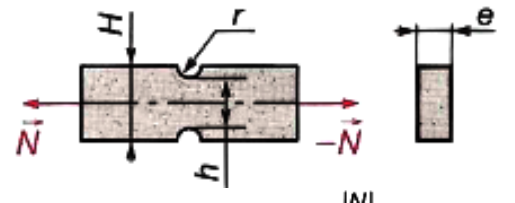


$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}| \quad |\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = h \cdot e$$

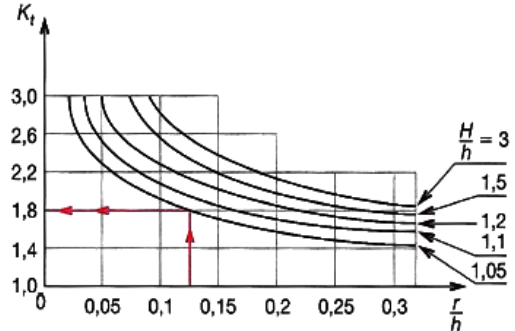


Exemple : $\frac{r}{h} = 0,125$; $\frac{H}{h} = 1,05$; $K_t = 1,4$

Plaque plane avec deux saignées sur les bords

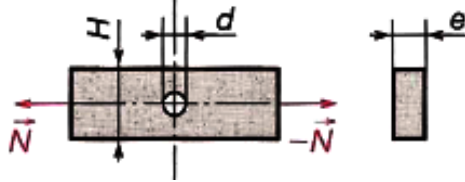


$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}| \quad |\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = h \cdot e$$

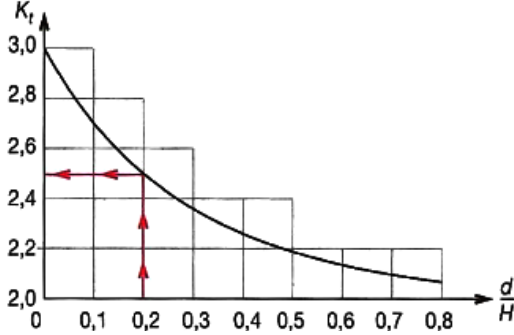


Exemple : $\frac{r}{h} = 0,125$; $\frac{H}{h} = 1,05$; $K_t = 1,8$

Plaque plane percée d'un trou sur l'axe de symétrie longitudinal

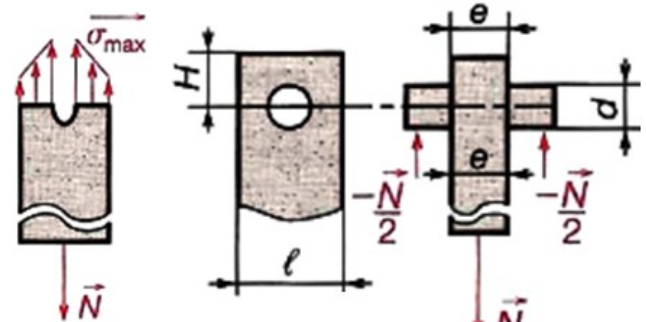


$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}| \quad |\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = (H - d) e$$

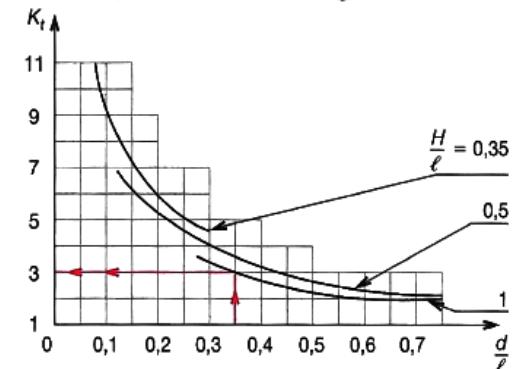


Exemple : $\frac{d}{H} = 0,2$; $K_t = 2,5$

Plaque plane percée d'un trou à une extrémité



$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}| \quad |\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = (\ell - d) e$$



Exemple : $\frac{d}{\ell} = 0,35$; $\frac{H}{\ell} = 1,0$; $K_t = 3$

Exemples de valeurs de α_L (10^{-6} m/m.°C)

| | | | |
|------------------|-----|------------------------------------|------|
| Invar (Fe+36%Ni) | 1,5 | Laiton | 18,9 |
| Silicium | 3 | Nylon (33% fibres de verre) | 20 |
| Tungstène | 4,5 | Magnésium | 23 |
| Granite | 8,7 | Aluminium | 25 |
| Verre | 9 | Plomb | 29 |
| Fer | 12 | Zinc | 30 |
| Acier | 12 | Polyéthylène (33% fibres de verre) | 48 |
| Fontes (EN-GJL) | 12 | Polystyrène | 70 |
| Nickel | 13 | Nylon | 80 |
| Cuivre | 16 | Polyéthylène | 100 |

❖ **Remarque** : Contraintes et déformations d'origine thermique, un changement de température engendre une modification des dimensions des poutres. Si la température augmente, la poutre en général s'allonge (dilatation) et inversement (contraction). Le plus souvent, les dilatations ou contractions varient linéairement avec la température et suivent la loi :

$$\Delta L = \alpha_L \cdot L \cdot \Delta T \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \alpha_L \cdot \Delta T$$

ΔL : allongement de la poutre (m)

L : longueur initiale de la poutre (m)

ΔT : accroissement de température (K, °C)

α_L : coefficient de dilatation linéique (°C⁻¹, K⁻¹)

Exemple : une barre en cuivre de 1 m, à 20 °C, est chauffée jusqu'à 200 °C. Déterminons sa longueur finale.

Réponse : $\Delta L = (16 \times 10^{-6}) \times 1000 \times (200 - 20) = 2,88$

$\Delta L \approx 2,9$ mm ; donc : $L = 1000 + 2,9 = 1002,9$ mm