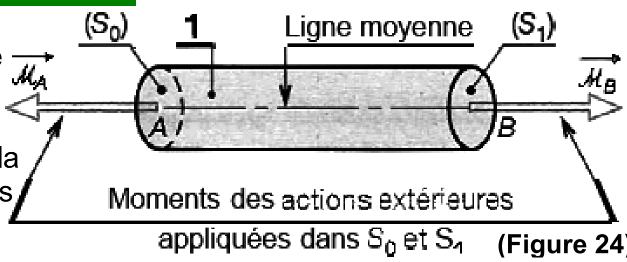
TORSION SIMPLE

I- HYPOTHÈSES : (Figure 24)

Le solide est idéal : matériau homogène, isotrope, poutre rectiligne de section constante et circulaire.

Les actions extérieures dans les sections extrêmes sont modélisables par deux moments opposés, portés par la ligne moyenne. La poutre est donc soumise à deux torseurs couples.

$$\{\tau_{\bar{1}/1}\}_A = \left\{\vec{0} \,\middle|\, \overrightarrow{M_A}\right\}_A \quad et \quad \{\tau_{\bar{1}/1}\}_B = \left\{\vec{0} \,\middle|\, \overrightarrow{M_B}\right\}_B$$



(Figure 24)

II- DÉFINITION : (Figure 25)

Une poutre est sollicitée à la torsion simple si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de la poutre peut se réduire en **G**, barycentre de la section droite (S) à un moment perpendiculaire à (S), tel que :

$$\{Coh_{II/I}\}_G = \left\{\vec{0} \,\middle|\, \overrightarrow{M_t}\right\}_G \quad dans \ R\left(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$$

$$avec : N = 0;\ Ty = 0;\ Tz = 0$$

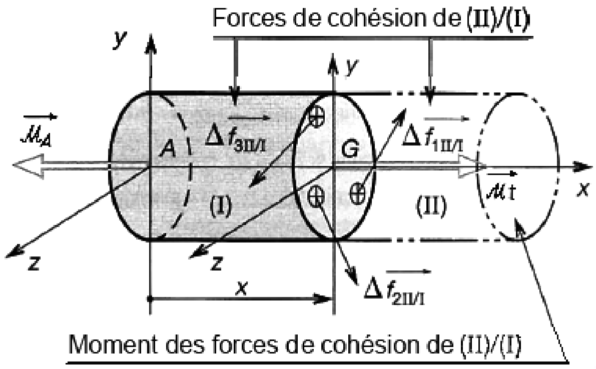
$$M_t \neq 0;\ M_{fGy} = 0;\ M_{fGz} = 0$$

et

$$\{Coh_{II/I}\}_G = -\{Action\ ext.à\ gauche/_I\}_G$$

$$\{Coh_{II/I}\}_G = +\{Action\ ext.à\ droite/_{II}\}_G$$

donc : $\boxed{\vec{R} = \vec{0} \ et \ \overrightarrow{M_t} = -\overrightarrow{M_A}}$



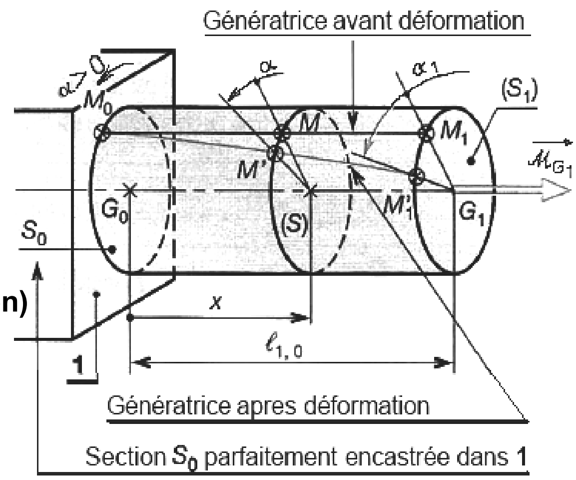
(Figure 25)

III- ÉTUDE DES DÉFORMATIONS : (angle unitaire de torsion) (Figure 26)

$$\boxed{\theta = \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha_1}{\ell_{1,0}}} \ ; Si\ \alpha > 0 \Rightarrow \theta > 0$$

θ : Angle unitaire de torsion en (rad/mm)

α : Angle de torsion en (rad).



(Figure 26)

IV- CONTRAINTE TANGENTIELLE DE TORSION : (Figure 27)

$$\boxed{\tau_M = G.\theta.\rho}$$

avec :

τ_M : Contrainte tangentielle due à la torsion en un point M en (MPa)

G : Module d'élasticité transversale (ou de Coulomb) en (MPa)

θ : Angle de torsion unitaire en (rad/mm)

ρ : Distance de M au centre de la section en (mm).

Remarque : La contrainte de torsion est maximale si M est sur la surface du solide c'est-à-dire, ρ = R

$$\boxed{\tau_{max\,i} = G.\theta.R}$$

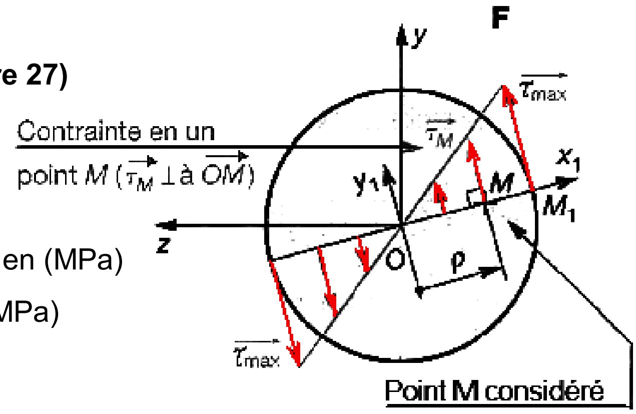


Diagramme de représentation des contraintes de torsion

(Figure 27)

V- MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN AXE DE SON PLAN:

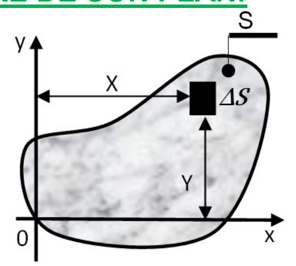
Pour les moments quadratiques faite attention aux axes !!!

Définition: **(Figure 28)**

Le moment quadratique ou d'inertie de la surface (S) est défini par:

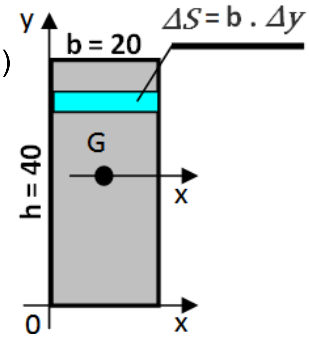
Proj/ox : ⇨ $$I_{ox} = \sum_{(s)} y^2.\Delta S = \int_{(s)} y^2.dS \quad (en\ mm^4)$$

Proj/oy : ⇨ $$I_{oy} = \sum_{(s)} x^2.\Delta S = \int_{(s)} x^2.dS \quad (en\ mm^4)$$



(Figure 28)

Remarque: Les moments quadratiques interviennent dans le calcul de la contrainte de torsion et de la flexion.



(Figure 29)

Exemple1: Calculer le moment quadratique (I_{ox} et I_{oy}) et (I_{Gx} et I_{Gy}) de la surface (S) définie par la figure 29.

Réponse :

Notons $$I_{ox} = \sum_{(s)} y^2.\Delta S = \sum_{(s)} y^2.b.\Delta y = b\sum_{y=0}^{y=h} y^2.\Delta y = b\int_{y=0}^{y=h} y^2.dy$$

$$I_{ox} = b.\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = b.\left[\frac{h^3-0}{3}\right] \quad \text{soit} \quad I_{ox} = \frac{b.h^3}{3}$$

On trouverait de la même façon: $$I_{oy} = \frac{h.b^3}{3}$$

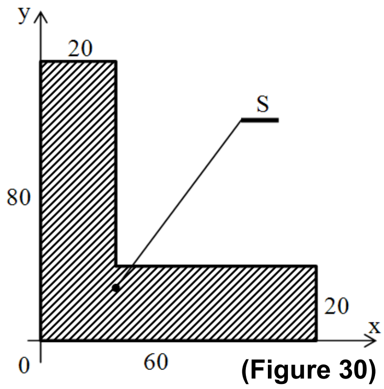
Et $$I_{G_x} = b\sum_{y=-\frac{h}{2}}^{y=+\frac{h}{2}} y^2.\Delta y = b\int_{y=-\frac{h}{2}}^{y=+\frac{h}{2}} y^2 dy$$ alors : $$I_{G_x} = \frac{bh^3}{12} \quad et \quad I_{G_y} = \frac{hb^3}{12}$$

Exemple2: Calculer le moment quadratique (I_{ox} et I_{oy}) de la surface (S) définie par la figure 30.

Réponse : (méthode 1)

Décomposons la surface (S) en deux surface (S_1) et (S_2) telles que:

S = S_1 + S_2 alors $I_{ox} = I_{1ox} + I_{2\,ox}$ *et* $I_{oy} = I_{1oy} + I_{2\,oy}$



(Figure 30)

$$* \; I_{1ox} = \int_s y_1^2 ds_1 = \int_s y_1^2 dx_1.dy_1 = \int_0^{20} dx_1.\int_0^{80} y_1^2 dy_1$$

$$I_{1ox} = [x_1]_0^{20}.\left[\frac{y_1^3}{3}\right]_0^{80} = (20-0).\left(\frac{80^3-0}{3}\right)$$

$$I_{1ox} = 20.\frac{512000}{3} = 341{,}33.10^4 mm^4$$

$$* \; I_{2ox} = \int_s y_2^2 ds_2 = \int_s y_2^2 dx_2.dy_2 = \int_{20}^{60} dx_2.\int_0^{20} y_2^2 dy_2 \Rightarrow \quad I_{2ox} = [x_2]_{20}^{60}.\left[\frac{y_2^3}{3}\right]_0^{20} = (60-20).\left(\frac{20^3-0^3}{3}\right)$$

$$I_{2ox} = 40.\frac{8000}{3} = 10{,}66.10^4 mm^4$$ ***D'OÙ : I_{ox} = 351,99.10^4 mm^4***

$$* \; I_{1oy} = \int_s x_1^2 ds_1 = \int_s x_1^2 dx_1.dy_1 = \int_0^{80} dy_1.\int_0^{20} x_1^2 dx_1 \Rightarrow I_{1oy} = [y_1]_0^{80}.\left[\frac{x_1^3}{3}\right]_0^{20} = (80-0).\left(\frac{20^3-0}{3}\right)$$

$$I_{1oy} = 80.\frac{8000}{3} = 21{,}33.10^4 mm^4$$ ***D'OÙ : I_{oy} = 159,99.10^4 mm^4***

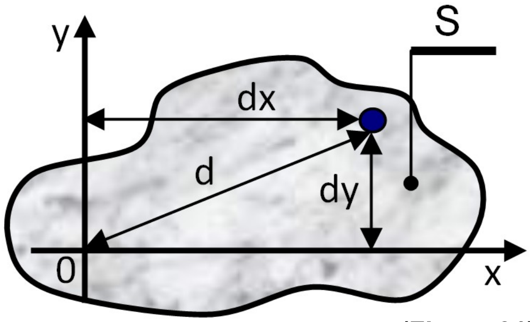
VI- MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN POINT: (Moment quadratique polaire) (Figure 31)

Le moment quadratique polaire est défini par:

$$I_0 = \sum_s d^2 \Delta S = \int_s d^2 \, dS \quad en \ (mm^4)$$

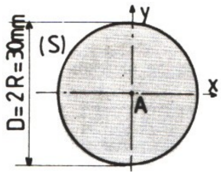
$$or \quad d^2 = d_x^2 + d_y^2 \Rightarrow I_0 = \sum_s \left(d_x^2 + d_y^2\right).\Delta S = \int_s \left(d_x^2 + d_y^2\right).dS$$

$$donc: \ I_0 = I_{0x} + I_{0y}$$



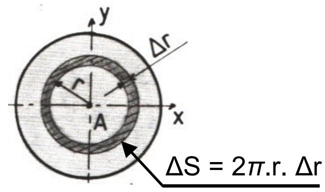
(Figure 31)

Exemple : cas d'une surface circulaire de rayon R = D/2
Calculons le moment quadratique polaire de l'élément de surface ΔS,
ΔS est la couronne de rayon moyen '' r '' et de largeur Δr (Δr est très petit).
$\Delta I_A = r^2 . \Delta S = 2\pi . r^3 . \Delta r$
Pour la surface (S) complète le moment quadratique polaire par rapport au point A est : $I_A = \sum \Delta I_A = \sum 2\pi . r^3 . \Delta r$
'' r '' varie de 0 à R, I_A peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale suivante :

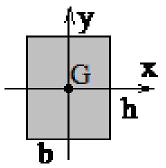
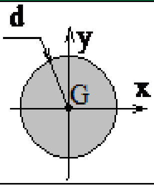
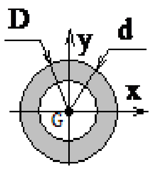


$$I_A = \int_0^R 2\pi . r^3 . dr = 2\pi . \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi 30^4}{32} = 79521{,}56 \, mm^4$$

Par symétrie $I_x = I_y$ il en résulte $I_x = I_y = I_A/2$



VII- MOMENTS QUADRATIQUES USUELS:

			
I_{Gx}	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$
I_{Gy}	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi}{64}\left(D^4 - d^4\right)$
I_G	$\frac{bh}{12}\left(b^2 + h^2\right)$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right)$

IIX- THEOREME DE HUYGNES ET CHNGEMENT D'AXE: (Figure 32)

Le moment quadratique d'une surface (S) par rapport à un axe (ox) quelconque de son plan est égal au moment quadratique de cette surface par rapport à l'axe (GX) passant par son centre de gravité et parallèle à (ox), plus le produit de l'aire de cette surface par le carré de la distance des deux axes (ox) et (GX).

X et Y passent par le centre de gravité G ou barycentre de la surface (S). x est parallèle à X et y à Y, ; dx et dy sont les distances entre les axes et S l'aire de la surface (S).

Remarque:

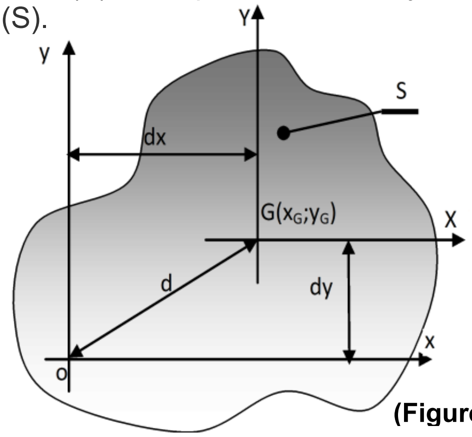
$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

$$I_{0x} = I_{G_X} + S d_y^2$$

$$I_{0y} = I_{G_Y} + S d_x^2$$

$$I_0 = I_G + S d^2$$

$$I_{0xy} = I_{G_X G_Y} + S d_x d_y$$



(Figure 32)

IX- ÉQUATION DE DÉFORMATION :

C'est la relation entre M_t et θ : $\boxed{M_t = G.\theta.I_0} \Longrightarrow \boxed{\alpha = \dfrac{M_t.\ell}{G.I_0}}$

Avec : - M_t : moment de torsion en (N.m)

G : Module d'élasticité transversale (ou de Coulomb) en (MPa)

θ : Angle de torsion unitaire en (rad/mm)

I_0 : moment quadratique polaire de S (mm^4).

X- CONTRAINTE DE TORSION :

C'est la relation entre M_t et τ $\boxed{\tau_M = \dfrac{M_t}{I_o}.\rho}$ Et la contrainte Maxi $\boxed{\tau_{M\,axi} = \dfrac{M_{tM\,axi}}{I_o/v}}$

Avec : - τ_M : contrainte tangentielle due à la torsion en un point M en (MPa)

- $\tau_{M\,axi}$ contrainte tangentielle maxi en (MPa)

M_t : moment de torsion en (N.m)

M_{tMaxi} : moment de torsion maxi en (N.m)

I_0 : moment quadratique polaire de S (mm^4).

v = R = ρ_{Maxi} : Distance de M au centre de la section en (mm).

XI- CONDITION DE RESISTANCE :

$$\boxed{\tau_{M\,axi} = \frac{M_{tM\,axi}}{I_o/v} \leq Rpg = \frac{Reg}{s}}$$

Avec : - **Rpg :** résistance pratique au glissement en (MPa)
- **Reg :** résistance élastique au glissement en (MPa)
- **s :** coefficient de sécurité

XII- CONDITION DE RIGIDITE :

$$\boxed{|\theta| = \frac{|M_t|}{G.I_o} \leq \theta_{\lim}}$$

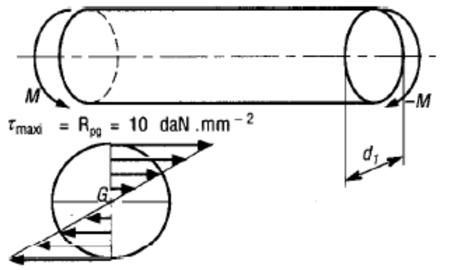
Avec : $\theta_{\lim}$: angle unitaire limite de torsion en (rad/mm)

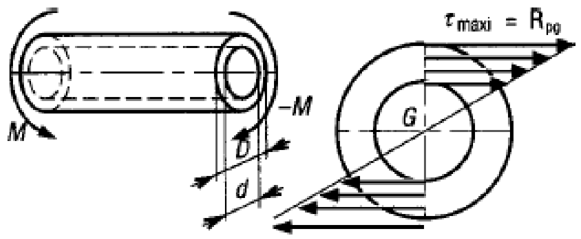
XIII- CONCENTRATION DE CONTRAINTES :

Lorsque les arbres étudiés présentent de brusques variation de section (gorge ; épaulement, trou…) les formules précédentes ne s'appliquent plus.
On dit qu'il y a concentration de contraintes. $\boxed{|\tau_{eff\,max\,i}| = k_t.|\tau_{th}| \leq Rpg}$

Comparaison entre arbre plein et arbre creux :

Soit deux arbres de transmission construits à partir du même acier, G=8000 daN/mm². Le premier est plein (diamètre d); le second est creux (diamètre extérieur D, diamètre intérieur *d = 0,8D).*
Le couple à transmettre est de 200 Nm ; la résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de 10 daN/mm². Déterminons les dimensions optimales des deux arbres et comparons les poids respectifs des deux constructions.





$$\tau_{\max i} = \frac{M_t}{I_{o1}/v_1} \leq 10\,daN/mm^2 \text{ et } \frac{I_{o1}}{v_1} = \frac{\pi d_1^3}{16}$$

$$\tau_{\max i} = \frac{2.10^4.16}{\pi d_1^3} \leq 10 \text{ d'où } d_1^3 \geq \frac{2.10^4.16}{10\pi}$$

Alors $d_1 \geq 21,67\,mm$

$$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 369,05\,mm^2$$

$$\tau_{\max i} = \frac{M_t}{I_{o2}/v_2} \leq 10\,daN/mm^2 \text{ et } I_{o2} = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}\left[1-(0,8)^4\right]$$

$$\frac{I_{o2}}{v_2} = \frac{\pi D_1^3}{16}\left[1-(0,8)^4\right] = 0,59\frac{\pi D_1^3}{16} \Rightarrow \tau_{\max i} = \frac{2.10^4.16}{0,59.\pi D^3} \leq 10$$

$$D^3 \geq \frac{2.10^4.16}{0,59.10\pi} \text{ alors } D \geq 25,83\,mm \text{ et } d = 20,67$$

$$S_2 = \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d^2\right) = 188,78\,mm^2$$

Remarquons que le rapport ''r'' des poids des deux arbres est égal au rapport des sections.
Pour cet exemple, le poids de l'arbre (2) est, à résistance égale, deux fois plus léger que l'arbre (1).
Cette solution est à envisager pour des constructions où la légèreté est recherchée.

Exemple : tige de tournevis.

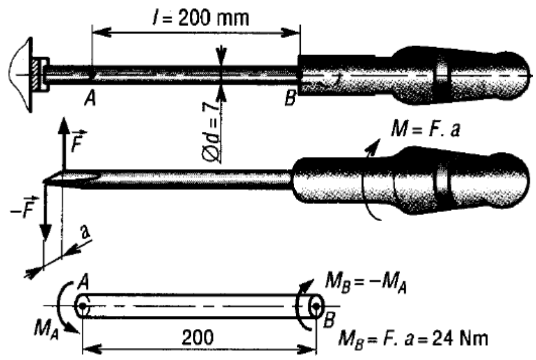
Le tronçon AB de la tige du tournevis proposé (longueur 200 mm, diamètre 7 mm) est soumis à une sollicitation de torsion. Le couple de torsion supporté par la tige est : M_B=-M_A= F.a=24 Nm.

1- si l'angle de torsion α_{AB} mesuré entre A et B est égal à 14,6°; **déterminons** θ.

2- G = 80 GPa ; θ = 73°/m. **Déterminons** la contrainte de cisaillement maximale dans la tige.

3- déterminons l'angle unitaire de torsion.

4- si, on impose une contrainte admissible au cisaillement de 200 MPa, **déterminons** la valeur minimale du diamètre ***d*** lorsque M_{tmaxi}= 24 Nm.



Rep :

1- $\theta = \frac{\alpha_{AB}}{L_{AB}} = \frac{14,6^\circ}{200.10^{-3}} \cdot \frac{\pi}{180} = 1,274\, rad/m$

2- $\tau_{\max i} = G.\theta.\rho_{\max i} = 80.10^3.0,001274.3,5 = 356,74\, MPa$

3- $\theta = \frac{M_t}{G.I_o} = \frac{24.10^3}{80.10^3.\frac{\pi.7^4}{32}} = 0,001274\, rad/mm$

4- $\tau_{\max i} = \frac{24.10^3}{\frac{I_o}{v}} = \frac{24.10^3}{\frac{\pi.d^3}{16}} \leq \tau_{adm} = 200\ N/mm^2$

D'où : $d^3 \geq \frac{24.10^3.16}{\pi.200}$ $alors\ \ d \geq 8,5\, mm$

Remarque :

Si, au cours de l'étude, un élève repère ce qui lui semble être une erreur ou fautes de frappe, il le signale au professeur de la matière !!!