

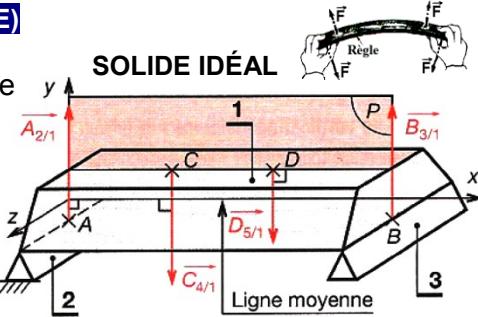
FLEXION PLANE (SIMPLE)

I- HYPOTHÈSE :

- ◆ **Solide idéal** : matériau homogène ; isotrope ; poutre rectiligne de sections constantes avec plan de symétrie (P)
- ◆ **Les actions extérieures** sont \perp à la ligne moyenne.
- ◆ **Les forces appliquées** sont soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée.

$$\{A_{2/1}\}_A = \begin{cases} \overrightarrow{A_{2/1}} \\ 0 \end{cases}_A, \quad \{C_{4/1}\}_C = \begin{cases} \overrightarrow{C_{4/1}} \\ 0 \end{cases}_C, \quad \{D_{5/1}\}_D = \begin{cases} \overrightarrow{D_{5/1}} \\ 0 \end{cases}_D \text{ et } \{B_{3/1}\}_B = \begin{cases} \overrightarrow{B_{3/1}} \\ 0 \end{cases}_B$$

Avec $\overrightarrow{A_{2/1}} = \|\overrightarrow{A_{2/1}}\| \cdot \vec{y}$, $\overrightarrow{C_{4/1}} = -\|\overrightarrow{C_{4/1}}\| \cdot \vec{y}$, $\overrightarrow{D_{5/1}} = -\|\overrightarrow{D_{5/1}}\| \cdot \vec{y}$ et $\overrightarrow{B_{3/1}} = \|\overrightarrow{B_{3/1}}\| \cdot \vec{y}$



II- DÉFINITION :

Une poutre est sollicitée à la flexion si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) de la poutre sur la partie gauche (I), peut se réduire en **G**, barycentre de la section droite (II), à une **résultante contenue dans le plan de symétrie et un moment perpendiculaire à ce dernier**, tel que :

($T_y \neq 0$: **flexion simple** et si $T_y = 0$: **flexion pure**)

$$\{Coh_{II/I}\}_G = \begin{cases} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fGz} \end{cases}_G \text{ dans } R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ et } \{Coh_{II/I}\}_G = -\{F_{ext. \text{ à gauche}} / I\}_G \\ = +\{F_{ext. \text{ à droite}} / II\}_G$$

III- CONTRAINTES NORMALES :

Lorsque la poutre fléchit, la section droite plane (S_2), par exemple, pivote d'un angle $\Delta\phi$ autour de l'axe (G_2, \vec{z}) perpendiculaire au plan de symétrie. On constate que :

- ◆ Les fibres contenues dans le plan passant par les barycentres G des sections (S_1) ne changent pas de longueur, les contraintes σ_M sont donc nulles en ces points.
- ◆ Les autres fibres s'allongent ou se raccourcissent. Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à l'ordonnée qui les séparent du plan des fibres neutres, d'où: $\sigma_M = -E \cdot \theta \cdot y$

σ_M : contrainte normale au point M due à la flexion (MPa).

E : module d'élasticité longitudinal (d'Young) (MPa).

y : ordonnée du point M / au plan de la fibre neutre (mm).

$$\theta : \text{angle unitaire de flexion (rad/mm)} \text{ avec } \theta = \frac{\Delta\phi}{\Delta x}$$

IV- VALEURS DES CONTRAINTES NORMALES :

En un point quelconque M, de la section droite, on a : $\sigma_M = -\frac{M_{fGz}}{I_{Gz}} \cdot (\pm y)$

σ_M : contrainte normale en M due à la flexion (MPa).

M_{fGz} : moment de flexion selon (G, \vec{z}) dans (S) (N . mm).

I_{Gz} : moment quadratique de la section droite (S) / à (G, \vec{z}) (mm⁴).

y : ordonnée du point M dans $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (mm).

En un point M, le plus éloigné de (G, \vec{z}), on écrit que :

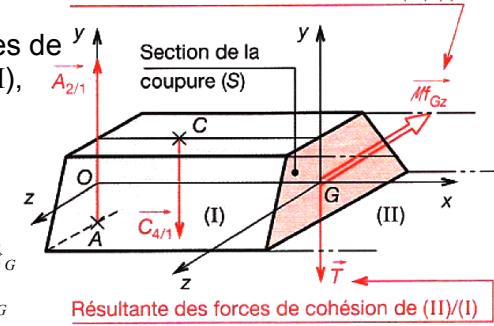
$$\sigma_{M_{max,i}} = -\frac{M_{fGz_{max,i}}}{I_{Gz}} \cdot (\pm y_{max,i})$$

$y_{max,i} = v$: ordonnée du point le plus éloigné de (G, \vec{z}) (mm).

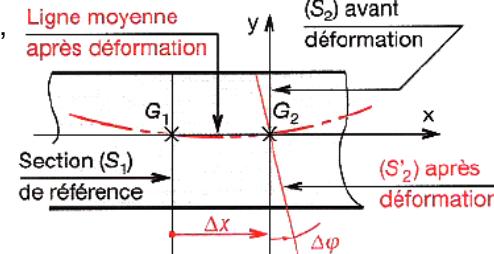
$$\frac{I_{Gz}}{y_{max,i}} = \frac{I_{Gz}}{v} : \text{module de flexion de la section droite (S) (mm}^3\text{)}$$

ISOLEMENT DU TRONÇON GAUCHE

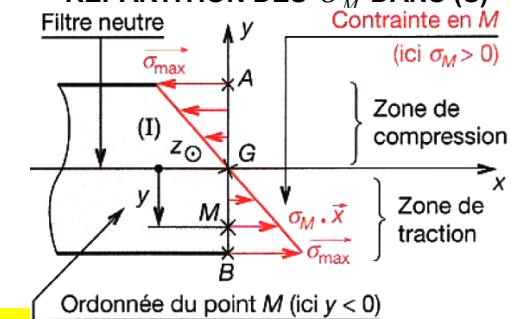
Moment des forces de cohésion de (II)/(I)



ANGLE UNITAIRE

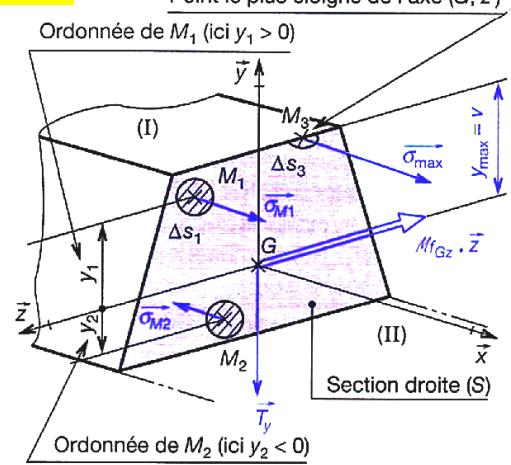


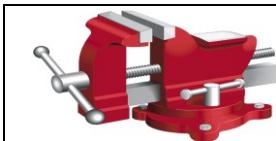
RÉPARTITION DES σ_M DANS (S)



CONTRAINTES NORMALES

Point le plus éloigné de l'axe (G, \vec{z})





V- CONDITION DE RÉSISTANCE :

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale due à la flexion doit rester inférieure à la résistance pratique à l'extension. On définit R_{pe} par le quotient de la résistance élastique à l'extension R_e par le coefficient de sécurité " s "

$$|\sigma|_{max_i} = \frac{|M_{fGz}|_{max_i}}{\frac{I_{Gz}}{|y|_{max_i}}} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

R_{pe} : résistance pratique à l'extension en (Mpa).
 R_e : résistance élastique à l'extension en (Mpa).
 s : coefficient de sécurité (sans unité).

VI- SOLIDE RÉEL :

Les poutres présentent souvent de brusques variations de sections. Dans les zones proches de ces variations, les formules précédentes ne s'appliquent plus. La répartition des contraintes n'est plus linéaire.

Il y a concentration de contrainte. $|\sigma_{eff}|_{max_i} = K_f \cdot |\sigma_{the}|$

$\sigma_{eff max_i}$: contrainte maximale effective (MPa).

σ_{the} : contrainte théorique sans concentration (MPa).

K_f : coefficient de concentration de contrainte relatif à la flexion, déterminé par tableaux ou abaques.

VII- EFFORTS INTÉRIEURS :

(Efforts tranchants et moments fléchissants) :

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T_y (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant M_{fGz} (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T_y).

► **REMARQUE :** La valeur des **efforts tranchants** et des **moments fléchissants** varie avec la position "x" de la coupe.

Les diagrammes des T_y (**effort tranchant**) et des M_{fGz} (**moment fléchissant**) sont des graphes mathématiques permettant de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums qui seront utilisés lors des calculs des **contraintes**.

Ex 1 - Soit une poutre 1 modélisée par sa ligne moyenne AB, le bâti supporte la poutre en A et B.

- ① Calculer la réaction en A ; la réaction en B ;
- ② Calculer l'effort tranchant T_y ; le moment fléchissant M_{fGz} .
- ③ Tracer le diagramme de T_y et de M_{fGz} .

Application numérique :

La réaction en C égale 200 daN ;

La distance $a = 2$ m ; La distance $\ell = 3$ m.

RÉPONSE : PFS :

$$\text{① } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{R}_A + \vec{R}_C + \vec{R}_B = \vec{0}$$

$$\text{Proj / oy : } R_A - R_C + R_B = 0$$

$$\sum M_A(\vec{F}_{ext}) = M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{R}_C) + M_A(\vec{R}_B) = \vec{0}$$

$$\text{Proj / oz : } 0 - R_C \cdot a + R_B \cdot \ell = 0$$

$$\triangleright R_B = \frac{R_C \cdot a}{\ell} = 133,33 \text{ daN}$$

$$\triangleright R_A = R_C - R_B = R_C(1 - \frac{a}{\ell}) = 66,66 \text{ daN}$$

② ♦ zone AC : $A \leq G \leq C ; 0 \leq x \leq a$

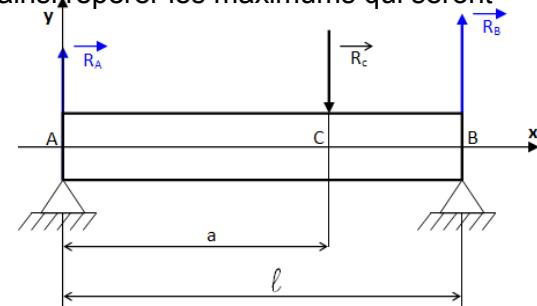
$$\triangleright T = -R_A = -66,66 \text{ daN}$$

$$\triangleright M_{fGz} = -(-R_A \cdot x)$$

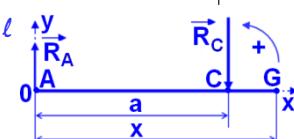
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : M_{fGz} = 0 \text{ daN.m} \\ x = a : M_{fGz} = R_A \cdot a = 133,33 \text{ daN.m} \end{array} \right.$$

► **REMARQUE :** on trouve

$$T_y = -\frac{dM_{fGz}(x)}{dx} \quad \text{et} \quad T_z = \frac{dM_{fGy}(x)}{dx}$$



- ♦ zone CB : $C \leq G \leq B ; a \leq x \leq l$
- $T = +R_B = 133,33 \text{ daN}$
- $M_{fGz} = [+R_B \cdot (l - x)]$



$$\left\{ \begin{array}{l} x = a : M_{fGz} = R_A \cdot a = R_B \cdot (l - a) = +133,33 \text{ daN.m} \\ x = l : M_{fGz} = -[-R_A \cdot l + R_B \cdot (l - a)] = [+R_B \cdot (l - l)] = 0 \end{array} \right.$$

- ③ Échelle des efforts tranchant : 1 cm → 121,2 daN
 $T = 133,33 \text{ daN}$



- Échelle des moments fléchissants : 1 cm → 55,09 daN.m
 $M_{fGz} = 133,33 \text{ daN.m}$

