

FLEXION PLANE (SIMPLE)

I- HYPOTHÈSE :

- ♦ **Solide idéal** : matériau homogène ; isotrope ; poutre rectiligne de sections constantes avec plan de symétrie (P)
- ♦ **Les actions extérieures** sont \perp à la ligne moyenne.
- ♦ **Les forces appliquées** sont soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée.

$$\{A_{2/1}\}_A = \begin{Bmatrix} \overline{A_{2/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A, \{C_{4/1}\}_C = \begin{Bmatrix} \overline{C_{4/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C, \{D_{5/1}\}_D = \begin{Bmatrix} \overline{D_{5/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_D \text{ et } \{B_{3/1}\}_B = \begin{Bmatrix} \overline{B_{3/1}} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B$$

Avec $\overline{A_{2/1}} = \|\overline{A_{2/1}}\| \cdot \vec{y}$, $\overline{C_{4/1}} = -\|\overline{C_{4/1}}\| \cdot \vec{y}$, $\overline{D_{5/1}} = -\|\overline{D_{5/1}}\| \cdot \vec{y}$ et $\overline{B_{3/1}} = \|\overline{B_{3/1}}\| \cdot \vec{y}$

II- DÉFINITION :

Une poutre est sollicitée à la flexion si le torseur associé aux forces de cohésion de la partie droite (II) de la poutre sur la partie gauche (I), peut se réduire en **G**, barycentre de la section droite (II), à une **résultante contenue dans le plan de symétrie et un moment perpendiculaire à ce dernier**, tel que :

(Ty $\neq 0$: flexion simple et si Ty = 0 : flexion pure)

$$\{Coh_{II/I}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fGz} \end{Bmatrix}_G \text{ dans } R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ et } \{Coh_{II/I}\}_G = -\{F_{ext} \text{ à gauche} / I\}_G = +\{F_{ext} \text{ à droite} / II\}_G$$

III- CONTRAINTES NORMALES :

Lorsque la poutre fléchit, la section droite plane (S₂), par exemple, pivote d'un angle $\Delta\varphi$ autour de l'axe (G₂, \vec{z}) perpendiculaire au plan de symétrie. On constate que :

- ♦ Les fibres contenues dans le plan passant par les barycentres G des sections (S₁) ne changent pas de longueur, les contraintes $\overline{\sigma}_M$ sont donc nulles en ces points.
- ♦ Les autres fibres s'allongent ou se raccourcissent. Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à l'ordonnée qui les séparent du plan des fibres neutres, d'où : $\sigma_M = -E \cdot \theta \cdot y$

σ_M : contrainte normale au point M due à la flexion (MPa).

E : module d'élasticité longitudinal (d'Young) (MPa).

y : ordonnée du point M / au plan de la fibre neutre (mm).

θ : angle unitaire de flexion (rad/mm) avec : $\theta = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$

IV- VALEURS DES CONTRAINTES NORMALES :

En un point quelconque M, de la section droite, on a :

$$\sigma_M = -\frac{M_{fGz}}{I_{Gz}} \cdot (\pm y)$$

σ_M : contrainte normale en M due à la flexion (MPa).

M_{fGz} : moment de flexion selon (G, \vec{z}) dans (S) (N .mm).

I_{Gz} : moment quadratique de la section droite (S) / à (G, \vec{z}) (mm⁴).

y : ordonnée du point M dans $R(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ (mm).

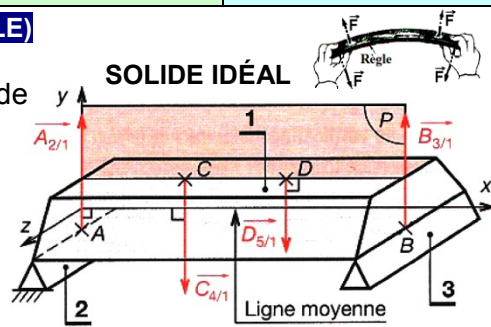
En un point M, le plus éloigné de (G, \vec{z}), on écrit que :

$$\sigma_{M \max i} = -\frac{M_{fGz \max i}}{I_{Gz}} \cdot (\pm y_{\max i})$$

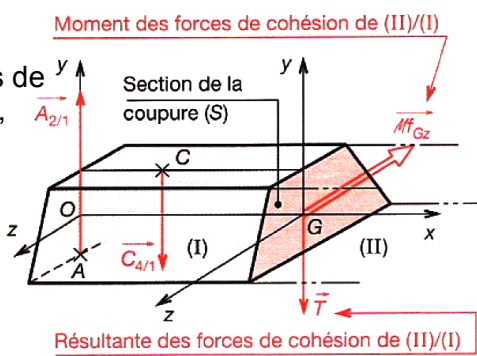
$y_{\max i} = v$: ordonnée du point le plus éloigné de (G, \vec{z}) (mm).

$\frac{I_{Gz}}{y_{\max i}} = \frac{I_{Gz}}{v}$: module de flexion de la section droite (S) (mm³).

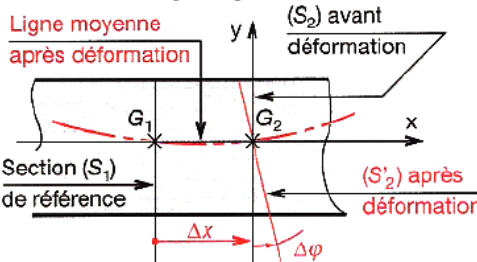
$y_{\max i}$



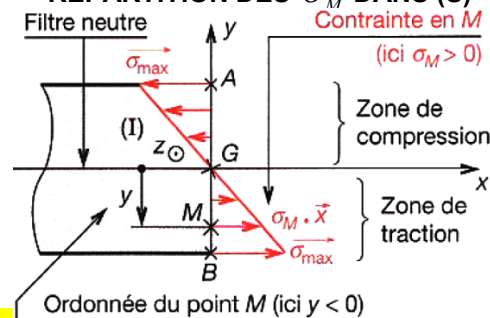
ISOLEMENT DU TRONÇON GAUCHE



ANGLE UNITAIRE

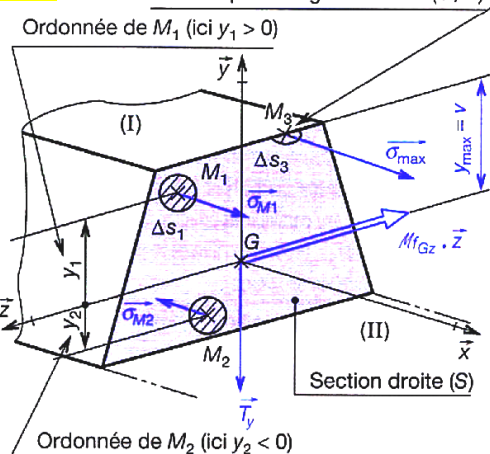


RÉPARTITION DES $\overline{\sigma}_M$ DANS (S)



CONTRAINTES NORMALES

Point le plus éloigné de l'axe (G, \vec{z})





V- CONDITION DE RÉSISTANCE :

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale due à la flexion doit rester inférieure à la résistance pratique à l'extension. On définit R_{pe} par le quotient de la résistance élastique à l'extension R_e par le coefficient de sécurité "s"

$$|\sigma|_{\max i} = \frac{|M_{fGz}|_{\max i}}{I_{Gz}} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$$

R_{pe} : résistance pratique à l'extension en (Mpa).

R_e : résistance élastique à l'extension en (Mpa).

s : coefficient de sécurité (sans unité).

VI- SOLIDE RÉEL :

Les poutres présentent souvent de brusques variations de sections. Dans les zones proches de ces variations, les formules précédentes ne s'appliquent plus. La répartition des contraintes n'est plus linéaire.

$\sigma_{eff \max i}$: contrainte maximale effective (MPa).

$\sigma_{thé}$: contrainte théorique sans concentration (MPa).

K_f : coefficient de concentration de contrainte relatif à la flexion, déterminé par tableaux ou abaques.

Il y a concentration de contrainte.

$$|\sigma_{eff}|_{\max i} = K_f \cdot |\sigma_{thé}|$$

VII- EFFORTS INTÉRIEURS : (Efforts tranchants et moments fléchissants) :

Dans le cas de la flexion, les efforts intérieurs dans n'importe quelle section droite se réduisent à un effort tranchant T_y (perpendiculaire à la ligne moyenne) et à un moment fléchissant M_{fGz} (perpendiculaire à la ligne moyenne et à T_y).

REMARQUE : La valeur des efforts tranchants et des moments fléchissants varie avec la position "x" de la coupure.

Les diagrammes des T_y (effort tranchant) et des M_{fGz} (moment fléchissant) graphes mathématiques permettent de décrire les variations de ces deux grandeurs et ainsi repérer les maximums qui seront utilisés lors des calculs des contraintes.

Ex 1 - Soit une poutre 1 modélisée par sa ligne moyenne AB, le bâti supporte la poutre en A et B.

- 1 Calculer la réaction en A ; la réaction en B ;
- 2 Calculer l'effort tranchant T_y ; le moment fléchissant M_{fGz} .
- 3 Tracer le diagramme de T_y et de M_{fGz} .

Application numérique :

La réaction en C égale 200 daN ;

La distance $a = 2$ m ; La distance $\ell = 3$ m.

RÉPONSE : PFS :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{R}_A + \vec{R}_C + \vec{R}_B = \vec{0}$$

$$Proj / oy : R_A - R_C + R_B = 0$$

$$\sum M_A(\vec{F}_{ext}) = M_A(\vec{R}_A) + M_A(\vec{R}_C) + M_A(\vec{R}_B) = 0$$

$$Proj / oz : 0 - R_C \cdot a + R_B \cdot \ell = 0$$

$$\triangleright R_B = \frac{R_C \cdot a}{\ell} = 133,33 \text{ daN}$$

$$\triangleright R_A = R_C - R_B = R_C \left(1 - \frac{a}{\ell}\right) = 66,66 \text{ daN}$$

2 ♦ zone AC : $A \leq G \leq C$; $0 \leq x \leq a$

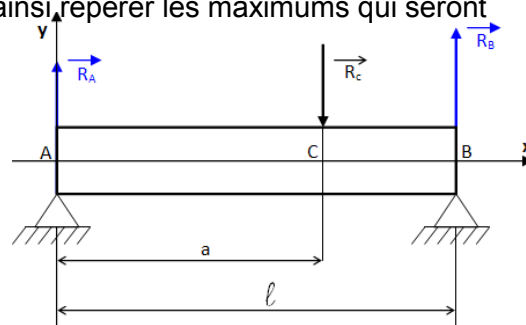
$$\triangleright T = -R_A = -66,66 \text{ daN}$$

$$\triangleright M_{fGz} = -(-R_A \cdot x)$$

$$si \begin{cases} x = 0 : M_{fGz} = 0 \text{ daN.m} \\ x = a : M_{fGz} = R_A \cdot a = 133,33 \text{ daN.m} \end{cases}$$

REMARQUE : on trouve

$$T_y = -\frac{dM_{fGz}(x)}{dx} \quad \text{et} \quad T_z = \frac{dM_{fGz}(x)}{dx}$$



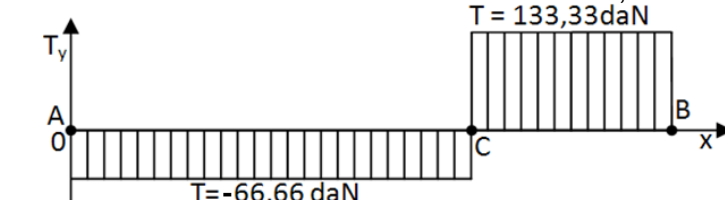
♦ zone CB : $C \leq G \leq B$; $a \leq x \leq \ell$

$$\triangleright T = +R_B = 133,33 \text{ daN}$$

$$\triangleright M_{fGz} = [+R_B \cdot (\ell - x)]$$

$$si \begin{cases} x = a : M_{fGz} = R_A \cdot a = R_B \cdot (\ell - a) = +133,33 \text{ daN.m} \\ x = \ell : M_{fGz} = -[-R_A \cdot \ell + R_C \cdot (\ell - a)] = [+R_B \cdot (\ell - \ell)] = 0 \end{cases}$$

3 Échelle des efforts tranchants : 1 cm \rightarrow 121,2 daN



Échelle des moments fléchissants : 1 cm \rightarrow 55,09 daN.m

