

La sphère

الفلكة

-I. الفلكة المعرفة بمركزها وشعاعها.

تعريف :

لتكن A نقطة من الفضاء \mathbb{E} و R عدد حقيقي.
 الفلكة التي مركزها A وشعاعها R هي مجموعة النقط M حيث:
 $.AM = R$ ونرمز لها بـ:
 $S(A, R)$
 $S(A, R) = \{M \in \mathbb{E} / AM = R\}$

معادلة فلكة :

(1) معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها :

$$\text{الفضاء } \mathbb{E} \text{ منسوب إلى معلم متعمد منظم } .(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

لتكن : $R > 0$ فلكة مركزها $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ وشعاعها R حيث
 $M(x, y, z) \in S(\Omega, R) \Leftrightarrow \Omega M = R$ لدينا :

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

و هذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة

أمثلة :

$$R = 2 , \quad \Omega(3, 0, 1) \quad (1)$$

$$S_1 : (x - 3)^2 + (y)^2 + (z - 1)^2 = 4 \quad (2)$$

$$R = 1 , \quad \Omega(1, 2, -3) \quad (2)$$

$$S_2 : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1 \quad (3)$$

$$(x + \sqrt{2})^2 + (y - 1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 2 \quad (3)$$

$$. R = \sqrt{2} \quad \Omega\left(-\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\right) \quad S_1 \text{ هي فلكة مركزها } R \text{ وشعاعها } \Omega\left(-\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$R = 1 \quad \text{و} \quad \Omega(0, 0, 0) \quad (4)$$

$$S_4 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

(2) معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها.

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من الفضاء \mathbb{E} .

توجد فلكة وحيدة S أحد أقطارها $[AB]$.

لتكن S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$B(x_B, y_B, z_B) \quad \text{و} \quad A(x_A, y_A, z_A) \quad \text{لتكن :}$$

$$. M(x, y, z) \quad \text{و :}$$

و S فلكة أحد أقطارها هو $[AB]$.

$$M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

لدينا : وهذه المعادلة هي معادلة ديكارتية للفلكة S التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

ملاحظة :

إذا كان $[AB]$ قطر للفلكة S فإن منتصف $[AB]$ هو مركزها وشعاعها هو $\frac{AB}{2}$.

$$(E) : x + y + z - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad (3)$$

$$(E) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d \quad \text{لدينا :}$$

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 - d < 0} \quad \text{الحالة ① :}$$

$$S = \emptyset$$

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 - d = 0} \quad \text{الحالة ② :}$$

$$S = \{\Omega(a, b, c)\}$$

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 - d > 0} \quad \text{الحالة ③ :}$$

$$R > 0 \quad \text{حيث} \quad R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

$$S = S(\Omega(a, b, c), R) \quad \text{نضع :}$$

$$(E) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + z - 3 = 0$$

مثال :

$$a = 0$$

$$b = 1$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$d = -3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - d = 1 + \frac{1}{4} + 3 = \frac{17}{4} > 0 \quad \text{إذن :}$$

$$R = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{وشعاعها} \quad \Omega\left(0, 1, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{إذن : فلكة مركزها :}$$

ط 2 :

$$(E) : x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + 3 \quad \text{لدينا :}$$

$$x^2 + (y-1)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow$$

$$S = S\left(\Omega\left(0, 1, \frac{-1}{2}\right), \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$

-II- تقاطع فلكة ومستوى :
الوضع النسبي لمستوى وفلكة :

ليكن P مستوى و S فلكة مركزها Ω وشعاعها R .
لدراسة الوضع النسبي للمستوى P والفلكة S ،
نحسب المسافة d بين (P) و Ω .

$$d = d(\Omega, (P)) \quad . \quad \underline{d(\Omega, (P)) > R} \quad : \text{الحالة ①}$$

$S \cap P = \emptyset$

$$\underline{d(\Omega, (P)) = R} \quad : \text{الحالة ②}$$

$$(S) \cap (P) = \{H\}$$

حيث H هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P) .
في هذه الحالة نقول ان المستوى (P) مماس للفلكة (S) .

$$\underline{d(\Omega, (P)) < R} \quad : \text{الحالة ③}$$

في هذه الحالة تقاطع (S) و (P) هو دائرة ℓ مركزها H .

(حيث H هو المسقط العمودي للنقطة Ω على (P)). وشعاعها r حيث :

$$d = d(\Omega, (P)) = \Omega H \quad : \text{علماً أن}$$

$$\underline{\text{مثال}} :$$

$$(P) : 2x - y + z + 1 = 0 \quad : \text{و}$$

$$\Omega(1, -1, 1) \quad : \text{حيث}$$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|2+1+1+1|}{\sqrt{4+1+1}} \quad : \text{لدينا}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} > 2 \quad : \text{إذن}$$

معادلة المستوى المماس للفلكة في نقطة معينة.
لتكن A نقطة من الفلكة S ذات المركز Ω والشعاع R .
ولتكن (P) المستوى المماس للفلكة S في A .

$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad : \text{لدينا}$

$$\underline{\text{ملاحظة}} :$$

$$\overrightarrow{\Omega A} \text{ منتظمة على } (P).$$

مثال :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \quad : \text{فلكة معادلتها}$$

$$A(1, 1, 0) \quad : \text{و}$$

حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S في A .

$A \in S \quad : \text{لدينا}$

$M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Omega} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \quad : \text{إذن}$

$\Omega(1, -1, 1, 0) \quad : \text{وبمأن}$

$$A(1, 1, 0)$$

$$M(x, y, z)$$

$$\overrightarrow{A\Omega}(0, -2, 0) \quad \text{فإن :} \\ \overrightarrow{AM}(x-1, y-1, z) \quad \text{إذن :} \\ -2(y-1) = 0 \quad \text{ومنه :} \\ y=1 \quad \text{هي معادلة المستوى المماس للفلكة } S \text{ في النقطة } A.$$

III- تقاطع فلكة ومستقيم :**مثال 1 :**أدرس تقاطع الفلكة S والمستقيم (D) .

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 4z - 5 = 0 \quad \text{حيث :}$$

$$(D): \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و :}$$

لدراسة تقاطع الفلكة (S) والمستقيم (D) ,

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{نحل النظم :} \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y - 4z - 5 = 0$$

$$t^2 + (t+1)^2 + 4 - 3t + 2(t+1) - 8 - 5 = 0 \quad \text{الجواب :}$$

$$2t^2 + t - 6 = 0 \quad \text{لتحل المعادلة :}$$

$$\Delta = 1 - 4(2) \times (-6)$$

$$= 49 > 0$$

$$t_1 = \frac{-1 - 7}{4} = -2 \quad \text{إذن :}$$

$$t_2 = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{3}{2}$$

ومنه تقاطع الفلكة S والمستقيم (D) هي النقطتين :

$$A(-2, -1, 2) \quad .B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right) \quad \text{و :}$$

مثال 2 :أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) والفالكة (S) .

$$(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = -4 \quad \text{حيث :}$$

$$(D): \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases} / \quad (t \in \mathbb{R})$$

الجواب :

$$(1+t-1)^2 + (-1+2t+1)^2 + t^2 = -4$$

$$t^2 + 4t^2 + t^2 = -4$$

$$6t^2 = -4$$

$$6t^2 + 4 = 0$$

$$\Delta = -96 < 0$$

$$(S) \cap (D) = \emptyset$$

ومنه :