

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الجداء المتجهي في الفضاء
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

1. حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية
2. أحسب مساحة المثلث ABC
3. حدد معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) .

(الجواب: 1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
 $\overrightarrow{AC}(1; -1; -1)$ و $\overrightarrow{AB}(1; 0; -2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

(2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

ومنه: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى ABC
نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل :
 $ax + by + cz + d = 0$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(-2; -1; -1)$ متجهة منظمية عليه اذن :

$$c = -1 \text{ و } b = -1 \text{ و } a = -2$$

ومنه : $(ABC) -2x - 1y - 1z + d = 0$

و نعلم أن: $A(0; 1; 2) \in (P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

$$يعني 0 - 1 - 2 + d = 0 \text{ يعني } d = 3$$

وبالتالي : $(ABC) -2x - 1y - 1z + 3 = 0$

يعني : $(ABC) 2x + y + z - 3 = 0$

تمرين 6: نعتبر النقط $A(1; 1; 0)$ و $B(2; 3; 4)$ و $C(-1; 0; 3)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ وبين أن النقط A و B و C غير مستقيمية
2. أحسب مساحة المثلث ABC
3. حدد معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) .

(الجواب: 1) $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
 $\overrightarrow{AC}(-2; -1; 3)$ و $\overrightarrow{AB}(1; 2; 4)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

تمرين 1: الفضاء منسوب إلى أساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

أحسب $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ إذا علمت أن: $\|\vec{u}\| = 1$ و $\|\vec{v}\| = 3$ و $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

(الجواب: 3) $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

تمرين 2: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا و M و N النقطتين

المعرفتين بما يلي: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(1) بين أن: $\overrightarrow{NG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

(2) أحسب: $\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{NG}$

(3) ماذا تستنتج ؟

(أجوبة: 1) $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{NG} = \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AH} - (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{NG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{NG} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) \wedge \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \right)$$

لدينا $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AE} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ اذن :

$$\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{NG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AE} = \vec{0}$$

(3) نستنتج أن المتجهتين: $\overrightarrow{NM}$ و $\overrightarrow{NG}$ مستقيمتين

وبالتالي النقط: M و N و G مستقيمية

تمرين 3: الفضاء منسوب إلى أساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

أحسب $\vec{u} \wedge \vec{v}$ $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ و $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

(الجواب: 1) $\vec{u}(1; 1; 1)$ و $\vec{v}(2; 1; 2)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

تمرين 4: $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ أحسب

$$\vec{u} \wedge \vec{v}$$

$\vec{u}(1; 2; 1)$ و $\vec{v}(3; -2; -1)$

(الجواب: 2) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$

تمرين 5: نعتبر في الفضاء النقط:

$A(0; 1; 2)$ و $B(1; 1; 0)$ و $C(1; 0; 1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$d(B; D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \quad (2)$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{10^2 + (-11)^2 + 3^2} = \sqrt{230}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{230}}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k} \quad (3)$$

على المستوى ABC

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0$$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (10; -11; 3)$ متجهة منظميه عليه اذن :

$$c = 3 \text{ و } b = -11 \text{ و } a = 10$$

$$(ABC) \quad 10x - 11y + 3z + d = 0 \quad \text{ومنه :}$$

و نعلم أن: $A(1; 1; 0) \in (P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

$$d = 1 \text{ يعني } 10 - 11 + 0 + d = 0$$

$$\text{وبالتالي : } (ABC) \quad 10x - 11y + 3z + 1 = 0$$

تمرين 7: أحسب مسافة النقطة $M(2; 1; 1)$ عن المستقيم (D)

المعرف بما يلي:

$$(D) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4t \end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 4t \end{cases}$$

لدينا $A(1; 1; 0) \in (D)$ و $\vec{u}(0; -3; 4)$ متجهة موجهة لـ (D)

$$\overrightarrow{AM}(1; 0; 1) \text{ و } \vec{u}(0; -3; 4)$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$d(M; D(A; \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

تمرين 8: أحسب مسافة النقطة $B(0; 1; 2)$ عن المستقيم (D)

المعرف بما يلي:

$$(D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

لدينا $A(1; 2; 0) \in (D)$ و $\vec{u}(1; -1; 2)$ متجهة موجهة لـ (D)

$$\overrightarrow{AB}(-1; -1; 2) \text{ و } \vec{u}(1; -1; 2)$$