

الأستاذ:  
نجيب  
عثماني

تمارين محلولة: الجداء السلمي وتطبيقاته  
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة  
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية  
الجهة  
الشرقية

إذن المجموعة (P) هي المستوى الذي معادلته:

$$2x + y - z + 2 = 0$$

**تمرين 4:** حدد متجهة منظمية على المستوى (P) في الحالات التالية :

$$(P) \quad 3x - z + 1 = 0 \quad (2) \quad (P) \quad 2x - 3y + z + 10 = 0 \quad (1)$$

$$(P) \quad z = 2 \quad (4) \quad (P) \quad y + z + 1 = 0 \quad (3)$$

$$(P) : 2y - z + 11 = 0 \quad (6) \quad (P) : x - 2y + 7z - 3 = 0 \quad (5)$$

**أجوبة 1:**  $\vec{n}(2; -3; 1)$  (2)  $\vec{n}(3; 0; -1)$  (3)  $\vec{n}(0; 1; 1)$

(4)  $\vec{n}(0; 0; 1)$  (5)  $\vec{n}(1; -2; 7)$  (6)  $\vec{n}(0; 2; -1)$

**تمرين 5:** نعتبر في الفضاء المتجهة  $\vec{n}(1; 2; 1)$  والنقطتين

$$A(-1; 0; 2) \text{ و } B(3; 1; 0)$$

(1) حدد معادلة ديكرتية للمستوى (P) المار من النقطة A و  $\vec{n}$  متجهة منظمية عليه.

(2) حدد تمثيلا باراميتريا للمستقيم (D) المار من النقطة B و العمودي على المستوى (P).

(3) حدد متلوث إحداثيات النقطة B' المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P).

**أجوبة 1:** تحديد معادلة ديكرتية للمستوى (P) :

**طريقة 1:**  $M(x; y; z) \in (P)$  يعني  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\vec{AM}(x+1; y; z-2) \text{ يعني}$$

$$(x+1) \times 1 + y \times 2 + 1 \times (z-2) = 0$$

يعني  $x+1+2y+z-2=0$  يعني  $x+2y+z-1=0$  (P)

**طريقة 2:** نعلم أن معادلة مستوى تكتب على الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0$$

و نعلم أن  $\vec{n}(1; 2; 1)$  متجهة منظمية عليه إذن :

$$a=1 \text{ و } b=1 \text{ و } c=1$$

ومنه :  $1x + 2y + 1z + d = 0$  (P)

و نعلم أن:  $A(-1; 0; 2) \in (P)$  إذن احداثيات A تحقق المعادلة :

يعني  $(-1) + 2 \times 0 + 1 \times 2 + d = 0$  يعني  $d = -1$

وبالتالي :  $(P) \quad x + 2y + z - 1 = 0$

(2) تحديد تمثيل باراميتري للمستقيم (D) :

(D) يمر من النقطة B و عمودي على المستوى (P).

إذن :  $\vec{n}(1; 2; 1)$  متجهة موجهة ل (D) و  $B(3; 1; 0) \in (D)$

**تمرين 1:** ليكن  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  أساسا في الفضاء  $\vec{u}(1; 5; -1)$  و

$$\vec{v}(-5; 1; 0) \text{ و } \vec{w} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

(1) هل المتجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدتين ؟

(2) أحسب :  $\|\vec{w}\|$  و  $\|\vec{u}\|$

**الجواب 1:** نحسب الجداء السلمي :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5) \times 1 + 1 \times 5 + 0 \times (-1) = (-5) + 5 = 0$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ ومنه :}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(1)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27} \quad (2)$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

**تمرين 2:**  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  معلم متعامد ممنظم مباشر للفضاء

نعتبر النقط :  $A(1; 0; -1)$  و  $B(1; 2; -1)$  والمتجهات :

$$\vec{v}(2; 1; 0) \text{ و } \vec{u}(3; -2; 1)$$

(1) أحسب المسافة بين النقطتين A و B

(2) أحسب  $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$

**الجواب:**

(1) المسافة بين النقطتين A و B هي:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (0)^2} = 2 \text{ أي : } AB = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{70}} \quad (2)$$

**تمرين 3:** نعتبر النقطة  $A(1; -1; 2)$  و المتجهة  $\vec{u}(2; 1; -1)$

حدد (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث:  $\vec{u} \cdot \vec{AM} = -1$

**الجواب:** لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{AM} = -1$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) + (y+1) - (z-2) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - z + 2 = 0 \text{ هذه المعادلة تكتب على الشكل :}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(D) : \begin{cases} x = -3t - 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{إذن :}$$

**تمرين 9:** حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) في الحالات التالية:

(1) (S) مركزها  $\Omega(1; 2; -3)$  و شعاعها  $R = 4$ .

(2) (S) مركزها  $\Omega(0; -1; 1)$  و تمر من النقطة  $A(1; 2; -1)$

**أجوبة : 1)** (S) مركزها  $\Omega(1; 2; -3)$  و شعاعها  $R = 4$ .

إذن :  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد :

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = 16$$

يعني :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$

وهي تكتب على الشكل التالي :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

(2) (S) مركزها  $\Omega(0; -1; 1)$  و تمر من النقطة  $A(1; 2; -1)$

يعني :  $\Omega A = R$

نحسب المسافة  $\Omega A$  :

$$R = \Omega A = \sqrt{(1-0)^2 + (2+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

ومنه: معادلة ديكارتية للفلكة هي :

$$(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \sqrt{14}^2$$

يعني :  $(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 12 = 0$

**تمرين 10:** حدد معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي أحد أقطارها

$[AB]$  نضع :  $B(1; 2; -1)$  و  $A(1; 0; -1)$

**الجواب: طريقة 1**

مركزها  $\Omega$  هو منتصف القطعة  $[AB]$

إذن :  $\Omega \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$  إذن :  $\Omega(1; 1; -1)$

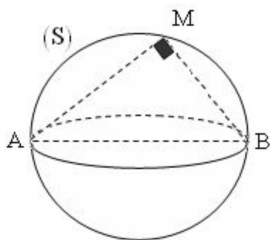
ولدينا أيضا :  $R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (0)^2}}{2} = 1$

ومنه: معادلة ديكارتية للفلكة هي :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1^2$$

يعني :  $(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$

**طريقة 2:** نستعمل الخاصية :



$B(1; 2; -1)$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  يعني  $M \in (S)$

لدينا  $\overrightarrow{MA}(1-x; 0-y; -1-z)$  و

$\overrightarrow{MB}(1-x; 2-y; -1-z)$

يعني  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$(1-x) \times (1-x) - y(2-y) + (-1-z)(-1-z) = 0$$

يعني  $(1-x)^2 - y(2-y) + (-1-z)^2 = 0$

$$\begin{cases} x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases} \quad \text{إذن : حيث } k \in \mathbb{R} \text{ وهو تمثيل باراميتري للمستقيم}$$

(3)  $B'$  هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P).

إذن :  $B' \in (P)$  و  $B' \in (D)$

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases} \quad \text{ومنه نحل النظام التالية :}$$

يعني  $6k + 4 = 0$  يعني  $k + 3 + 2(2k + 1) + k - 1 = 0$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \\ z = -\frac{2}{3} + 0 \end{cases} \quad \text{يعني } k = -\frac{2}{3} \text{ ومنه :}$$

ومنه :  $B' \left( \frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3} \right)$

**تمرين 6:** حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المحدد ب

$A(-5; 2; -1)$  و  $\vec{n}(2; 1; -2)$  متجهة منظمية عليه

**الجواب:** نعتبر :  $M(x; y; z) \in (P)$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow 2(x+5) + (y-2) - 2(z+1) = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 6 = 0$$

و منه :  $(P) : 2x + y - 2z + 6 = 0$

**تمرين 7:** نعتبر في الفضاء النقطة  $A(5; 1; 0)$  و المستوى (P)

الذي معادلته  $x + 2y + 2z - 6 = 0$

أحسب :  $d(A; (P))$

**الجواب:**  $d(A; (P)) = \frac{|5 + 2 \times 1 + 2 \times 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1|}{3} = \frac{1}{3}$

**تمرين 8:**  $(P) : -3x + 2y + z + 2 = 0$

ليكن :  $(D) \perp (P)$  و  $B(-2; 2; 3) \in (D)$

(1) احسب :  $d(B; (P))$  حدد تمثيلا بارامتريا ل (D)

**أجوبة : 1)**  $d(B; (P)) = \frac{|-3 \times -2 + 2 \times 2 + 3 + 2|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{14}}$

(2) لدينا :  $(P) : -3x + 2y + z + 2 = 0$

إذن :  $\vec{n}(-3; 2; 1)$  متجهة منظمية على (P)

و بما أن :  $(D) \perp (P)$  فإن :

$\vec{n}(-3; 2; 1)$  متجهة موجهة ل (D)

و لدينا :  $B(-2; 2; 3) \in (D)$

**2) نحل النظام التالية :**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0 \\ x = 2t \\ y = 5 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$(2t)^2 + (5+t)^2 + (1-2t)^2 + 6 \times 2t - 4(5+t) - 2(1-2t) + 5 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \text{ يعني } 9t^2 + 18t + 9 = 0$$

لدينا:  $\Delta = 0$  اذن للمعادلة حل حقيقي مزدوج  $t = \frac{-b}{2a} = -1$

نعوض  $t = -1$  في التمثيل البارامترى ل (D)

$$\text{فنجد : } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4; \\ z = 3 \end{cases} \text{ ومنه هناك نقطة وحيدة مشتركة بين (S) و (D)}$$

هي:  $T(-2; 4; 3)$

في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) نقطة وحيدة مشتركة هي

T

اذن المستقيم (D) مماس للفلكة (S) في النقطة T.

**تمرين 13:** لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases} \text{ و (D) المستقيم المعروف بما يلي:}$$

أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

**الجواب :**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

**نحل النظام التالية :**

$$(-1+2t)^2 + (2-2t)^2 + (-1+t)^2 - 4 \times (-1+2t) - 2(2-2t) - 1 = 0$$

$$\Delta = 18^2 - 4 \times 9 \times 5 = 324 - 180 = 144 = 12^2 \text{ لدينا: } 9t^2 - 18t + 5 = 0$$

اذن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما:  $t_1 = \frac{1}{3}$  و  $t_2 = \frac{5}{3}$

نعوض  $t = \frac{1}{3}$  و  $\frac{5}{3}$  في التمثيل البارامترى ل (D) فنجد نقطتين:

$$\text{هما : } A \left( -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3} \right) \text{ و } B \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ و } A \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

في هذا المثال للفلكة (S) و المستقيم (D) لهما

نقطتان مشتركتان هما A و B، نقول:

اذن المستقيم (D) قاطع للفلكة (S).

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

**تمرين 11:** حدد مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  التي تحقق المعادلات التالية:

$$(E_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 6z + 6 = 0 \quad (1)$$

$$(E_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 6 = 0 \quad (2)$$

$$(E_3): x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z + \frac{9}{2} = 0 \quad (3)$$

**أجوبة : (1)**  $(E_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 6z + 6 = 0$

على الشكل :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا :  $a = -6$  و  $b = 4$  و  $c = -6$  و  $d = 6$

نحسب :  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 36 + 16 + 36 - 24 = 64 > 0$$

ومنه :  $(E_1)$  فلكة مركزها  $\Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$  أي  $\Omega(3; -2; 3)$

و شعاعها هو :  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$  أي  $R = 4$

$$(E_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 6 = 0 \quad (2)$$

على الشكل :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا :  $a = -4$  و  $b = 2$  و  $c = 2$  و  $d = 6$

نحسب :  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 16 + 4 + 4 - 24 = 0$$

ومنه :  $(E_2)$  هي النقطة  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$  أي  $(E_2) = \left\{ \Omega(2; -1; -1) \right\}$

$$(E_2) = \left\{ \Omega(2; -1; -1) \right\}$$

$$(E_3): x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z + \frac{9}{2} = 0 \quad (3)$$

على الشكل :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا :  $a = -1$  و  $b = 3$  و  $c = 2$  و  $d = \frac{9}{2}$

نحسب :  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 1 + 9 + 4 - 18 = -4 < 0$$

ومنه :  $(E_3)$  هي المجموعة الفارغة.

**تمرين 12:** لتكن (S) الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$$

و (D) المستقيم المار من  $A(0; 5; 1)$  و  $\vec{n}(2; 1; -2)$  متجهة موجهة له

(1) حدد تمثيل بارامترى للمستقيم (D)

(2) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (D) و الفلكة (S)

**الجواب : (1)** تمثيل بارامترى للمستقيم (D) هو :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

**تمرين 14:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0 \quad (D) \text{ المستقيم}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

أدرس الوضع النسبي للمستقيم  $(D)$  و الفلكة  $(S)$

**الجواب :**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

نحل النظام التالية :

$$0^2 + t^2 + t^2 - 2 \times 0 + 4t - 2t + 4 = 0$$

$$2t^2 + 2t + 4 = 0 \text{ يعني } t^2 + t + 2 = 0 \text{ لدينا: } \Delta = 1^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$$

اذن المعادلة ليس لها حل في  $\mathbb{R}$

ومنه المستقيم  $(D)$  يوجد خارج الفلكة  $(S)$ . يعني :

$$(S) \cap (D) = \emptyset$$

**تمرين 15:** تكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها:

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

$$A(1; 1; -2) \text{ و } \vec{u}(-3; 2; 1)$$

ادرس تقاطع المستقيم  $(D(A; \vec{u}))$  و  $(S)$

**الجواب :**  $M(x; y; z) \in (D) \cap (S)$

نبحث عن : تمثيل بارامتري ل  $(D)$  :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ يعني : } M(x; y; z) \in (S) \text{ و}$$

$$(1 - 3t)^2 + (1 + 2t)^2 + (-2 + t)^2 = 6$$

$$14t^2 - 6t + 6 = 6 \text{ يعني : } 14t^2 - 6t = 0$$

$$t(7t - 3) = 0 \text{ يعني : } t = 0 \text{ أو } t = \frac{3}{7}$$

$$\text{ومنه : } M\left(\frac{-2}{7}; \frac{13}{7}; \frac{-13}{7}\right) ; M(1; 1; -2)$$

$$\text{إذن : } (D) \cap (S) = \left\{ A(1; 1; -2) ; B\left(\frac{-2}{7}; \frac{13}{7}; \frac{-13}{7}\right) \right\}$$

**تمرين 16:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad (P) \text{ المستوي}$$

$$2x + y + 2z - 3 = 0 \text{ بالمعادلة:}$$

(1) حدد المركز  $\Omega$  للفلكة  $(S)$  وشعاعها  $R$

(2) أحسب :  $d(\Omega; (P))$  وتأكد أن  $(P)$  يقطع الفلكة في نقطة

وحيدة  $T$

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $\Omega$

والعمودي على  $(P)$

(4) استنتج احداثيات  $T$  نقطة تماس الفلكة  $(S)$  و المستوى  $(P)$

$$\text{أجوبة: } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$\text{على الشكل : } x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{اذن لدينا : } a = 2 \text{ و } b = -2 \text{ و } c = 2 \text{ و } d = -1$$

$$\text{نحسب : } a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 > 0$$

$$\text{ومنه : } (S) \text{ فلكة مركزها } \Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right) \text{ أي } \Omega(-1; 1; -1)$$

$$\text{و شعاعها هو: } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \text{ أي } R = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{(2) } 2x + y + 2z - 3 = 0 \text{ و } \Omega(-1; 1; -1)$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2 \times (-1) + 1 + 2 \times (-1) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-6|}{3} = \frac{6}{3} = 2 = R$$

ومنه :  $(P)$  يقطع الفلكة في نقطة وحيدة  $T$

نقول  $(P)$  مماس للفلكة  $(S)$  في  $T$

(3)  $(\Delta)$  يمر من  $\Omega$  وعمودي على  $(P)$  ونعلم أن :  $\vec{n}(2; 1; 2)$

متجهة منظمية على  $(P)$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1t + 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

$$(4) T(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$$

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1t + 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t - 1 \end{cases} \text{ و } (P) \quad 2x + y + 2z - 3 = 0$$

$$\text{اذن : } 2(2t - 1) + (t + 1) + 2(2t - 1) - 3 = 0$$

$$\text{يعني } 9t - 6 = 0 \text{ يعني } t = \frac{2}{3} \text{ وبالتعويض في التمثيل البارامتري}$$

نجد

$$\text{ومنه : } T\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ نقطة التماس} \begin{cases} x = 2 \times \frac{2}{3} - 1 \\ y = 1 \times \frac{2}{3} + 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \times \frac{2}{3} - 1 \end{cases}$$

**تمرين 17:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي مركزها  $\Omega(2; 0; 1)$  شعاعها

$$R = 3 \text{ والمستوى } (P) \text{ المعروف}$$

$$\text{بالمعادلة: } x - 2y + z + 3 = 0$$

(1) حدد معادلة ديكارتية للفلكة  $(S)$

(2) أحسب :  $d(\Omega; (P))$  وتأكد أن  $(P)$  يقطع الفلكة وفق دائرة

(C) يتم تحديد شعاعها  $r$

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $\Omega$

والعمودي على  $(P)$

(4) استنتج احداثيات  $H$  مركز الدائرة  $(C)$

**أجوبة : (1)** اذن :  $(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد :

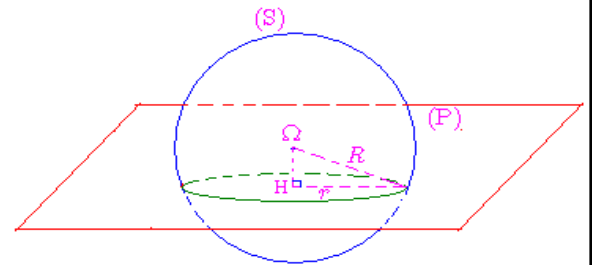
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z - 4 = 0$$

$$\Omega(2; 0; 1) \text{ و } x - 2y + z + 3 = 0$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2+4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < R = 3$$

ومنه :  $(P)$  يقطع الفلكة وفق دائرة  $(C)$



نلاحظ أننا نحصل على مثلث قائم الزاوية في  $H$

ومنه حسب فيثاغورس فان :  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

$$r = \sqrt{3^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}$$

$$\Omega(2; 0; 1) \text{ و } (P) \quad x - 2y + z + 3 = 0$$

$(\Delta)$  يمر من  $\Omega$  وعمودي على  $(P)$  ونعلم أن :  $\vec{n}(1; -2; 1)$

متجهة منظمية على  $(P)$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = -2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1t + 1 \end{cases}$$

$$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P) \quad (4)$$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = -2t; (t \in \mathbb{R}) \text{ و } (P) \quad x - 2y + z + 3 = 0 \\ z = 1t + 1 \end{cases}$$

$$(t+2) - 2(-2t) + (t+1) + 3 = 0$$

$$6t + 6 = 0 \text{ يعني } t = -1 \text{ وبالتعويض في}$$

التمثيل البارامترى نجد :

$$\begin{cases} x = -1 + 2 \\ y = -2(-1) \\ z = -1 + 1 \end{cases}$$

ومنه :  $H(1; 2; 0)$  مركز الدائرة  $(C)$

**تمرين 18:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \text{ و المستوى } (P)$$

الذي معادلته الديكارتية هي :  $x + y - z + 2 = 0$

(1) حدد المركز  $\Omega$  للفلكة  $(S)$  وشعاعها  $R$

(2) أحسب :  $d(\Omega; (P))$  ماذا تستنتج ؟

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \text{ **أجوبة : (1)** }$$

$$\text{على الشكل : } x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{اذن لدينا : } a = -2 \text{ و } b = 0 \text{ و } c = 0 \text{ و } d = 0$$

$$\text{نحسب : } a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 > 0$$

$$\text{ومنه : } (S) \text{ فلكة مركزها } \Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right) \text{ أي : } \Omega(1; 0; 0)$$

$$\text{و شعاعها هو : } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \text{ أي : } R = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Omega(1; 0; 0) \text{ و } x + y - z + 2 = 0$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|1+2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} > R = 1$$

ومنه :  $(P)$  يوجد خارج الفلكة  $(S)$  أو لا يقطع الفلكة

**تمرين 19:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z = 5$$

والمستوى  $(P)$  المعروف ب  $2x - 2y + z + 3 = 0$

(1) حدد المركز  $\Omega$  للفلكة  $(S)$  وشعاعها  $R$

(2) بين أن  $(P)$  يقطع الفلكة وفق دائرة  $(C)$  يتم تحديد شعاعها  $r$

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $\Omega$  والعمودي على

$(P)$

(4) استنتج احداثيات  $H$  مركز الدائرة  $(C)$

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z = 5 \text{ **أجوبة : (1)** }$$

$$\text{على الشكل : } x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{اذن لدينا : } a = -2 \text{ و } b = 6 \text{ و } c = 2 \text{ و } d = -5$$

$$\text{نحسب : } a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 64 > 0$$

$$\text{ومنه : } (S) \text{ فلكة مركزها } \Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right) \text{ أي : } \Omega(1; -3; -1)$$

$$\text{و شعاعها هو : } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \text{ أي : } R = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Omega(1; -3; -1) \text{ و } (P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2+6-1+3|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|10|}{3} = \frac{10}{3} < R = 4$$

ومنه :  $(P)$  يقطع الفلكة وفق دائرة  $(C)$

$$S(\Omega; R) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = 5 \quad (2)$$

نحدد مركز الفلكة :  $a = 2$  و  $b = 4$  و  $c = -6$

ومنه :  $(S)$  فلكة مركزها  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$  أي  $\Omega(-1; -2; 3)$

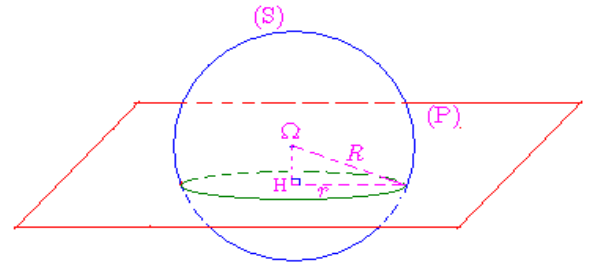
لنكن  $M(x; y; z)$  :  $A(2; -1; 0)$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$  يعني  $M(x; y; z) \in (P)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-3; -1; 3)$  و  $\overrightarrow{AM}(x-2; y+1; z)$

يعني  $-3(x-2) - (y+1) + 3z = 0$

يعني  $(P) -3x - y + 3z + 5 = 0$



$$r = \sqrt{4^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{100}{9}} = \sqrt{\frac{44}{9}} = \frac{\sqrt{44}}{3} = \frac{2\sqrt{11}}{3}$$

$\Omega(1; -3; -1)$  و  $(P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$  (3)

$(\Delta)$  يمر من  $\Omega$  وعمودي على  $(P)$  ونعلم أن :  $\vec{n}(2; -2; 1)$

متجهة منظمية على  $(P)$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t - 3 \\ z = 1t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P) \quad (4)$$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -2t - 3 \\ z = 1t - 1 \end{cases} \quad (P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$$

$$2(2t+1) - 2(-2t-3) + (t-1) + 3 = 0$$

$$9t + 10 = 0 \text{ يعني } t = -\frac{10}{9} \text{ وبالتعويض في التمثيل}$$

البارامترى نجد

$$H\left(-\frac{11}{9}; -\frac{7}{9}; -\frac{19}{9}\right) \text{ مركز الدائرة (C) } \begin{cases} x = -\frac{11}{9} \\ y = -\frac{7}{9} \\ z = -\frac{19}{9} \end{cases}$$

**تمرين 20:**

$$S(\Omega; R) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = 5$$

(1) بين أن :  $A(2; -1; 0) \in (S)$

(2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى  $(P)$  المماس ل  $(S)$  في  $A$

**الجواب :**

**1** نعوض باحداثيات في معادلة الفلكة ونجد أنها تحقق المعادلة

$$(S) : 2^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2 \times 2 + 4 \times (-1) - 6 \times 0 = 5$$

