

تمرين 1

1- حدد a ; b ; c حيث $\frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$ $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\}$

أحسب $\int_0^2 \frac{-3x^2 + 7x + 2}{x^2 - 2x - 3} dx$

أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$ و $\int_0^1 \frac{x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$

3- بين أن $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

أحسب $\int_0^x \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} dt$

تمرين 2

1- باستعمال المتكاملة بالأجزاء أحسب $\int_0^{\ln 2} (x+2)e^{2x} dx$ و $\int_0^1 x^2 \ln(x^2+1) dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$

$\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ و

2- حدد الدالة الأصلية لـ $x \rightarrow \sin^3 x$ التي تنعدم في 0 على \mathbb{R} ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^3 x dx$

تمرين 3

نعتبر $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

1- أحسب I_1

2- بين $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ باستعمال المتكاملة بالأجزاء.

3- أحسب $I_3 - I_2$

4- أستنتج $\int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x) e^x dx$

تمرين 4

1- بين أن $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

2- استنتاج $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

3- استنتاج تأطيراً لـ $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ إلى 0,1

تمرين 5

1- تحقق أن $\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

2- نعتبر $k \in [0;1]$

باستعمال المتكاملة بالأجزاء أحسب $A_k = \int_k^1 \frac{2x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$

حدد $\lim A_k$

تمرين 10

$$\frac{t^2 - t + 1}{t(t^2 + 1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + 1}$$

ب- أحسب $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 - t + 1}{t(t^2 + 1)} dt$

أ- أحسب $\int_0^1 (3x^2 + 2x + 1) \ln(x + 1) dx$ باستعمال المتكاملة بالأجزاء

تمرين 11

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

أ- أحسب $I(\alpha) = \int_{\alpha}^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$ باستعمال المتكاملة بالأجزاء حيث $\alpha \in [0; 1]$

ب- أحسب $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$

تمرين 12

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx \quad ; \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sin x)^n}{\cos x} dx \quad \text{و} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

أ- أحسب I_1 واستنتج I_5 ; I_3

ب- أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x)^n \cos x dx$ واستنتج $I_{n+2} - I_n$ بدلالة n .

أ- بين أن الدالة $x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$ دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$

ب- استنتج I_0 ثم I_4 ; I_2

على $\left[0; \frac{\pi}{3} \right]$

$x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$

أ- بين أن الدالة $x \rightarrow \ln \left[\operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$ دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{1}{\cos x}$

ب- استنتاج I_0 ثم I_4 ; I_2