

الأستاذ:  
نجيب  
عثماني

سلسلة رقم 9: التكامل  
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة  
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية  
الجهة  
الشرقية

**تمرين 5:** نضع:  $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$  و

$$J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

1. أحسب  $I + J$  و  $I - 3J$

2. استنتج قيمة كل من  $I$  و  $J$

**تمرين 6:** احسب التكامل  $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2 - 4x)^2} dx$

**تمرين 7:** احسب التكامل  $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

**تمرين 8:** نضع  $A = \int_1^e \left( \frac{1}{t} + \ln t \right) dt$

أحسب  $A + B$   $B = \int_1^e \left( 1 + \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right) dt$

**تمرين 9:** نضع:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

1. أحسب  $I + J$  و  $I - J$

2. استنتج قيمة كل من  $I$  و  $J$

**تمرين 10:** 1) تحقق أنه لكل  $t$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$ :

$$\frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

2) أحسب التكامل  $I$  حيث:  $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$

**تمرين 11:** 1) تحقق أنه لكل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ :

$$\frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

2) أحسب التكامل  $I$  حيث:  $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$

**تمرين 12:**

1. حدد الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  علما أن:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$$

2. استنتج قيمة التكامل:  $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$

**تمرين 1:** أحسب التكاملات التالية (1):  $I = \int_2^4 3x dx$

$$(2) J = \int_0^1 (2x+3) dx \quad (3) K = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt \quad (4)$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$$

**تمرين 2:** أحسب التكاملات الآتية:  $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx \quad I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt \quad I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt \quad I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx \quad I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx$$

$$I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx \quad I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx$$

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \quad I_{16} = \int_0^1 \left( \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx$$

$$I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx \quad I_{18} = \int_0^1 (x-1)e^{(x-1)^2} dx$$

$$I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx \quad I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx$$

$$I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$$

**تمرين 3:** أحسب التكامل  $I = \int_0^3 |x-1| dx$

**تمرين 4:** نضع:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$   $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

1. أحسب  $I + J$  و  $I - J$

2. استنتج قيمة كل من  $I$  و  $J$

**تمرين 13:** نضع:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1. بين:  $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$  (عملية الاخطاط)

2. استنتج حساب التكامل:  $I$

**تمرين 14:** بين أن:  $\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$

**تمرين 15:** بين أن:  $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$

**تمرين 16:** نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

1) بين أن  $(u_n)$  تزايدية (2) بين أن:  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$   $\forall n \in \mathbb{N}$

**تمرين 17:** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

حدد القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[0; \ln 2]$

**تمرين 18:** احسب التكامل  $I = \int_0^{\ln 2} e^{4t} dt$

**تمرين 19:** احسب التكاملات التالية: (1)  $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$

$$(2) \quad J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx \quad (3) \quad K = \int_1^e \ln x dx$$

**تمرين 20:** باستعمال المكاملة بالأجزاء احسب التكاملات الآتية:

$$I = \int_0^1 x e^{2x} dx \quad \text{و} \quad J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

**تمرين 21:** المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  مع

$$\|\vec{i}\| = 1cm \quad \text{نعتبر الدالة العددية } f \text{ المعرفة على المجال } [1; 3]$$

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{كالتالي:}$$

(1) هل  $f$  دالة متصلة على قطعة  $[1; 3]$  ؟

(2) أرسم  $(C_f)$  منحنى الدالة  $f$  على المجال  $[1; 3]$

(3) احسب مساحة حيز المستوى  $(\Delta_f)$  المحصور بين  $(C_f)$  منحنى

الدالة  $f$  و محور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتها على

التوالي  $x = 1$  و  $x = 3$

(4) احسب التكامل التالي:  $I = \int_1^3 f(x) dx$

(5) قارن المساحة والتكامل ؟

**تمرين 22:** المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  مع

$$\|\vec{i}\| = 2cm$$

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = x^2$

(1) أرسم  $(C_f)$  احسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحصور بين

منحنى الدالة  $f$  و محور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتها على

التوالي:  $x = 1$  و  $x = 2$

**تمرين 23:** المستوى المنسوب إلى معلم متعامد  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  مع

$$\|\vec{i}\| = 2cm \quad \text{و} \quad \|\vec{j}\| = 3cm \quad \text{نعتبر الدالة العددية } f \text{ المعرفة}$$

بما يلي:  $f(x) = x^2 - 2x$  احسب  $A$  مساحة حيز المستوى

المحصور بين منحنى الدالة  $f$  والمستقيمين اللذين معادلتها على

التوالي:  $x = 1$  و  $x = 3$

**تمرين 24:** المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

مع  $\|\vec{i}\| = 2cm$  ونعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = 1 - e^x$$

احسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة  $f$  و

المستقيمين اللذين معادلتها على التوالي:  $x = \ln 2$  و  $x = \ln 4$

**تمرين 25:** المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

$$\|\vec{i}\| = 2cm$$

نعتبر الدالتين العدديتين  $f$  و  $g$  المعرفتين بما يلي:

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} \quad \text{و} \quad g(x) = e^{-x}$$

احسب ب  $cm^2$  مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى

الدالتين  $f$  و  $g$  والمستقيمين اللذين معادلتها على التوالي:  $x = 0$

و  $x = \ln 2$  (إنشاء المنحنيين غير مطلوب)

**تمرين 26:** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

بحيث:  $\|\vec{i}\| = 2cm$  لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$

بما يلي:  $f(x) = \sqrt{x}$  ليكن  $(C)$  منحناها في المعلم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

احسب  $V$  حجم الجسم المولد بدوران  $(C)$  حول محور الأفاصل

على المجال  $[0; 4]$

**تمرين 27:** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\|\vec{i}\| = \frac{2}{3} cm$$

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$$

ليكن  $(C)$  منحناها في المعلم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

احسب  $V$  حجم الجسم المولد بدوران  $(C)$  حول محور الأفاصل

على المجال  $[0; 1]$

$$\text{ومنه: } I = \frac{1}{2} \pi \quad \text{وبالتالي: } I = \frac{4\pi}{27} c^3 m \quad \text{و} \quad V = \frac{1}{2} \pi \times \frac{8}{27} c^3 m$$

**تمرين 28:** المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

مع  $\|\vec{i}\| = 1cm$  نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$$

احسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحصور بين الدالة  $f$  والمستقيمتين

التي معادلاتها على التوالي  $y = x - 1$  و  $x = 1$  و  $x = e$

**تمرين 29:** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  بحيث  $\|\vec{i}\| = 2cm$  :

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $f(x) = \sqrt{\ln x}$

ليكن  $(C)$  منحناها في المعلم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

أحسب  $V$  حجم الجسم المولد بدوران  $(C)$  حول محور الأفاصيل على المجال  $[1; e]$

**تمرين 30:** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  بحيث  $\|\vec{i}\| = 2cm$  :

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = x\sqrt{1 - \ln x}$$

ليكن  $(C)$  منحناها في المعلم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

أحسب  $V$  حجم الجسم المولد بدوران  $(C)$  حول محور الأفاصيل على المجال  $[1; e]$

**تمرين 31:** باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx \quad I = \int_0^\pi x \sin x dx$$

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad M = \int_1^e x(1 - \ln x) dx \quad K = \int_0^1 \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$\left( \frac{x^4}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \text{ لاحظ أن: } \right) G = \int_0^1 3x^2 \ln(x^2+1) dx \quad \text{و} \quad F = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1} \ln x (e^x+1) dx$$

**تمرين 32:** المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  مع  $\|\vec{i}\| = 2cm$

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = e^x - 3$

أحسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة  $f$  والمستقيمين الذين معادلتها على التوالي:  $x = \ln 3$  و  $x = \ln 6$

**تمرين 33:** المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  مع  $\|\vec{i}\| = 2cm$

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = \ln x - 1$

أحسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة  $f$  والمستقيمين الذين معادلتها على التوالي:  $x = 1$  و  $x = e$

**تمرين 34:** بين أن :

$$1. \text{ بين أن : } \int_0^1 (e^x - e^{x^2}) dx \geq 0$$

$$2. \text{ بين أن : } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \cos t} dt < 0$$

$$3. \text{ بين أن : } \frac{1}{2} \ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2$$

$$4. \text{ بين أن : } \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$