

الأستاذ:  
نجيب  
عثمانى

**سلسلة رقم 9: التكامل**  
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة  
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية  
الجهة  
الشرقية

**تمرين 5:** نضع:  $I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$

$$J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

$$I - 3J \quad I + J$$

$$1. \text{ أحسب } I + J \quad 2. \text{ استنتج قيمة كل من } I \text{ و } J$$

**تمرين 6:** احسب التكامل  $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2 - 4x)^2} dx$

**تمرين 7:** احسب التكامل  $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

**تمرين 8:** نضع  $A = \int_1^e \left( \frac{1}{t} + \ln t \right) dt$

$$A + B \quad \text{أحسب } B = \int_1^e \left( 1 + \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right) dt$$

**تمرين 9:** نضع:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

$$I - J \quad I + J$$

$$1. \text{ أحسب } I + J \quad 2. \text{ استنتاج قيمة كل من } I \text{ و } J$$

**تمرين 10:** تتحقق أنه لكل  $t$  من  $\{-1\}$  تحقق أنه لكل  $t$  من  $\{1\}$

$$\frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt \quad \text{أحسب التكامل } I \text{ حيث: (2)}$$

**تمرين 11:** تتحقق أنه لكل  $x$  من  $\{1\}$

$$\frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

$$I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx \quad \text{أحسب التكامل } I \text{ حيث: (2)}$$

**تمرين 12:**

$$1. \text{ حدد الأعداد الحقيقة: } a \text{ و } b \text{ علماً أن:}$$

$$\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$$

$$2. \text{ استنتاج قيمة التكامل: } I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$$

**تمرين 1:** أحسب التكاملات التالية:  $I = \int_2^4 3x dx$  (1)

$$(4) \quad K = \int_e^e \frac{1}{t} dt \quad (3) \quad J = \int_0^1 (2x+3) dx \quad (2)$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta$$

**تمرين 2:** أحسب التكاملات الآتية:  $I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$$

$$I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} te^{-t^2} dt \quad I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$$

$$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx \quad I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx \quad I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$$

$$I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx \quad I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$$

$$I_{16} = \int_0^1 \left( \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx \quad I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx \quad I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx \quad I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$$

$$I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$$

**تمرين 3:** أحسب التكامل  $I = \int_0^3 |x-1| dx$

**تمرين 4:** نضع:  $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

$$1. \text{ أحسب } I - J \quad I + J \\ 2. \text{ استنتاج قيمة كل من } I \text{ و } J$$

**تمرين 23:** المستوى المنسوب إلى معلم متعمد  $(\bar{j}; \bar{i}; o)$  مع

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = x^2 - 2x$  أحسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحسور بين منحنى الدالة  $f$  و المستقيمين الذين معادلتها على التوالي:  $x=1$  و  $x=3$

**تمرين 24:** المستوى المنسوب إلى معلم متعمد منظم  $(o; \bar{i}; \bar{j})$

مع  $\|\bar{i}\| = 2cm$  و نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = 1 - e^x$

أحسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحسور بين منحنى الدالة  $f$  و المستقيمين الذين معادلتها على التوالي:  $x = \ln 4$  و  $x = \ln 2$

**تمرين 25:** المستوى منسوب إلى معلم متعمد منظم  $(o; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$

حيث  $\|\bar{i}\| = 2cm$

نعتبر الدالتي العدديتين  $f$  و  $g$  المعرفتين بما يلي:

$$g(x) = e^{-x} \quad f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x}$$

أحسب بـ  $cm^2$  مساحة حيز المستوى المحسور بين منحنى الدالتي  $f$  و  $g$  و المستقيمين الذين معادلتها على التوالي:  $x=0$  و  $x=\ln 2$  (إنشاء المنحني غير مطلوب)

**تمرين 26:** الفضاء منسوب إلى معلم متعمد منظم  $(o; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$

حيث : لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$

بما يلي:  $f(x) = \sqrt{x}$  ليكن  $(C)$  منحناها في المعلم  $(o; \bar{i}; \bar{j})$

أحسب  $V$  حجم المجسم المولد بدوران  $(C)$  حول محور الأفاصيل على المجال  $[0; 4]$

**تمرين 27:** الفضاء منسوب إلى معلم متعمد منظم  $(o; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$

حيث :  $\|\bar{i}\| = \frac{2}{3} cm$

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$$

ليكن  $(C)$  منحناها في المعلم  $(o; \bar{i}; \bar{j})$

أحسب  $V$  حجم المجسم المولد بدوران  $(C)$  حول محور الأفاصيل على المجال  $[0; 1]$

ومنه :  $I = \frac{1}{2} \pi \times \frac{8}{27} c^3 m = \frac{4\pi}{27} c^3 m$  وبالتالي :

**تمرين 28:** المستوى منسوب إلى معلم متعمد منظم  $(o; \bar{i}; \bar{j})$

مع  $\|\bar{i}\| = 1cm$  نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$$

أحسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحسور بين الدالة  $f$  و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي  $x=1$  و  $x=e$  و  $y=1$

**تمرين 13:** نضع:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$

1. بين :  $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$  (عملية الاخطاط)

2. استنتج حساب التكامل:  $I$

$$\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$

**تمرين 16:** نعتبر المتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

(1) بين أن  $(u_n)$  تزايدية (2) بين أن :  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

**تمرين 17:** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

حدد القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[0; \ln 2]$

**تمرين 18:** احسب التكامل  $I = \int_0^{\ln 2} e^{4t} dt$

**تمرين 19:** احسب التكاملات التالية : (1)  $I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$

$$K = \int_1^e \ln x dx \quad (3) \quad J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx \quad (2)$$

**تمرين 20:** باستعمال المتكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad I = \int_0^1 x e^{2x} dx$$

**تمرين 21:** المستوى منسوب إلى معلم متعمد منظم  $(\bar{j}; \bar{i}; o)$  مع

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال :  $[1; 3]$

$$f(x) = 2x + 1$$

(1) هل  $f$  دالة متصلة على قطعة  $[1; 3]$  ؟

(2) أرسم  $(C_f)$  منحني الدالة  $f$  على المجال  $[1; 3]$

(3) أحسب مساحة حيز المستوى  $(\Delta_f)$  المحسور بين  $(C_f)$  منحني الدالة  $f$  و محور الأفاصيل و المستقيمين الذين معادلتها على التوالي  $x=1$  و  $x=3$

(4) أحسب التكامل التالي :  $I = \int_1^3 f(x) dx$

(5) قارن المساحة والتكامل ؟

**تمرين 22:** المستوى منسوب إلى معلم متعمد منظم  $(\bar{j}; \bar{i}; o)$  مع

$$\|\bar{i}\| = 2cm$$

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = x^2$

(1) أرسم  $(C_f)$  (2) أحسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحسور بين منحني الدالة  $f$  و محور الأفاصيل و المستقيمين الذين معادلتها على التوالي  $x=1$  و  $x=2$

**تمرين 29:** الفضاء منسوب إلى معلم متعمد مننظم  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  بحيث :

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

ليكن  $(C)$  منهاها في المعلم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

أحسب  $V$  حجم المجسم المولد بدوران  $(C)$  حول محور الأفاسيل على المجال  $[1; e]$

**تمرين 30:** الفضاء منسوب إلى معلم متعمد مننظم  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  بحيث :

لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:

$$f(x) = x\sqrt{1 - \ln x}$$

ليكن  $(C)$  منهاها في المعلم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

أحسب  $V$  حجم المجسم المولد بدوران  $(C)$  حول محور الأفاسيل على المجال  $[1; e]$

**تمرين 31:** باستعمال المتكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx \quad I = \int_0^\pi x \sin x dx$$

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad M = \int_1^e x(1 - \ln x) dx \quad K = \int_0^1 \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$\left( \frac{x^4}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \text{ لاحظ أن: } G = \int_0^1 3x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad F = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} \ln x (e^x + 1) dx$$

**تمرين 32:** المستوى المنسوب إلى معلم متعمد مننظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  مع

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = e^x - 3$

أحسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحسور بين منحنى الدالة  $f$  و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي:  $x = \ln 3$  و  $x = \ln 6$

**تمرين 33:** المستوى المنسوب إلى معلم متعمد مننظم  $(o; \vec{i}; \vec{j})$  مع

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = \ln x - 1$

أحسب  $A$  مساحة حيز المستوى المحسور بين منحنى الدالة  $f$  و المستقيمين الذين معادلتهما على التوالي:  $x = 1$  و  $x = e$

**تمرين 34:** بين أن :

$$1. \text{ بين أن : } \int_0^1 (e^x - e^{x^2}) dx \geq 0$$

$$2. \text{ بين أن : } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \cos t} dt < 0$$

$$3. \text{ بين أن : } \frac{1}{2} \ln 2 \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \ln 2$$

$$4. \text{ بين أن : } \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1$$