

ذ. محمد الكيال

الحساب التكاملي

← تكامل دالة متصلة على قطعة:

◆ **تعريف:**

لتكن f دالة متصلة على مجال I و F دالة أصلية للدالة f على المجال I
و a و b عنصرين من المجال I
تكاملي الدالة f من a إلى b هو العدد الحقيقي :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

← خاصيات:

◆ **الخطائية:**

$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$	$\int_a^a f(x) dx = 0$
$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$	$(k \in \mathbb{R}) \quad \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$

◆ **علاقة شال:**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

← التكاملي و الترتيب:

$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$ إذا كان :	$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq 0$ إذا كان :
$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ فإن :	$\int_a^b f(x) dx \geq 0$ فإن :

← القيمة المتوسطة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

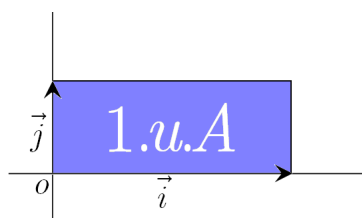
القيمة المتوسطة للدالة على المجال هي العدد الحقيقي :

← التكامل بالأجزاء:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث الدالتين u' و v' متصلتين على المجال I
و a و b عنصرين من المجال I

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

← مساحة حيز



ليكن المستوى منسوباً إلى معلم متعامد $(o, \vec{i}, \vec{j})$

وحدة المساحة $u.A$ هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة o والمتجهين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1.u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

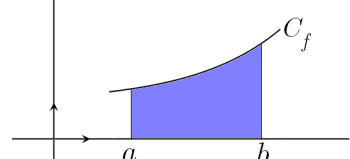
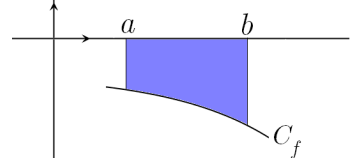
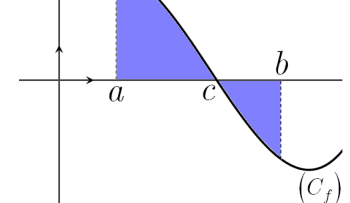
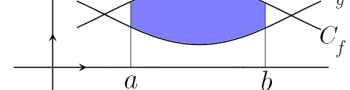
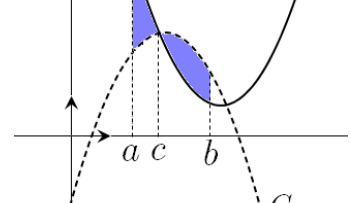
لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a, b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنيين C_f و C_g ومحور
الأفصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما:
 $x = a$ و $x = b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \right) \cdot u.A$$

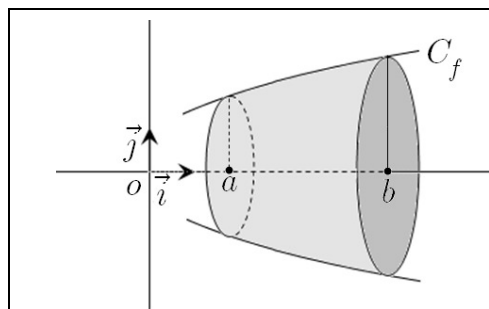
لتكن f دالة متصلة على مجال $[a, b]$
مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f ومحور الأفصيل
والمستقيمين اللذين معادلتاهما:
 $x = a$ و $x = b$ هي:

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right) \cdot u.A$$

حالات خاصة:

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز البنفسجي في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot u.A$
	f سالبة على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b -f(x) dx \right) \cdot u.A$
	• f موجبة على المجال $[a, c]$ • f سالبة على المجال $[c, b]$	$\left(\int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx \right) \cdot u.A$
	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a, b]$	$\left(\int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right) \cdot u.A$
	• (C_f) فوق (C_g) على المجال $[a, c]$ • (C_g) فوق (C_f) على المجال $[c, b]$	$\left(\int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx \right) \cdot u.A$

← حساب حجم:



حجم الجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور
الأفصيل دورة كاملة في مجال $[a; b]$

$$V = \left[\int_a^b \pi (f(x))^2 dx \right] \cdot u.v$$

هو: uv وحدة الحجم