

# التكامل

## I- تكامل دالة متصلة على مجال

### 1- تعريف و ترميز

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$ .  
إذا كانت  $F$  و  $G$  دالتين أصليتين للدالة  $f$  على  $I$  فان  $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$   
أي أن العدد الحقيقي  $F(b)-F(a)$  غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية  $f$ .

#### تعريف

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  عنصرين من  $I$ .  
العدد الحقيقي  $F(b)-F(a)$  حيث  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$ , يسمى تكامل الدالة  $f$  من  $a$  إلى  $b$ . ويكتب  $\int_a^b f(x)dx$  ويقرأ مجموع  $f(x)dx$  من  $a$  إلى  $b$  أو تكامل من  $a$  إلى  $b$  لـ  $f(x)dx$ .

$\int_a^b f(x)dx$  و  $b$  يسميا محددا التكامل  $a$

في الكتابة  $\int_a^b f(x)dx$  يمكن تعويض  $x$  بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$$

من أجل تبسيط الكتابة  $F(b)-F(a)$  نكتبها على الشكل

#### أمثلة

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx \quad * \quad \text{حسب}$$

الدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  متصلة على  $[1; 2]$  و دالة أصلية لها هي  $x \rightarrow \ln x$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 \quad \text{اذن}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx ; \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx \quad * \quad \text{أحسب}$$

### 2- خصائص

#### أ- خصائص

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  و  $c$  عناصر من  $I$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx * \quad \int_a^a f(x)dx = 0 *$$

$$(علاقة شال) \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx * \quad$$

#### أمثلة

$$I = \int_{-1}^1 |x| dx \quad \text{أحسب}$$

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[ \frac{-1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1$$

ب-) لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  عنصرا من  $I$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

لدينا  $\forall x \in I \quad \varphi(x) = F(x) - F(a)$  حيث  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $I$   
 اذن  $\varphi$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $\varphi'(a) = f(a)$  أي أن  $\varphi$  دالة الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  التي تنعدم

في  $a$   
خاصية

لتكن  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و  $a$  عنصراً من  $I$ .

الدالة المعرفة على  $I$  بما يلي  $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$  هي الدالة الأصلية لـ  $f$  على  $I$  التي تنعدم في  $a$

مثال نعلم أن الدالة  $x \rightarrow \ln x$  هي الدالة الأصلية لـ  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  على  $[0; +\infty]$  التي تنعدم في 1.

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ  $f$  على  $[0; +\infty[$  التي تنعدم في 2 حيث  $\forall x \in [0; +\infty[ \quad f(x) = \frac{1}{x} \ln x$

ج)- خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$  و  $\lambda$  عدد حقيقي ثابت

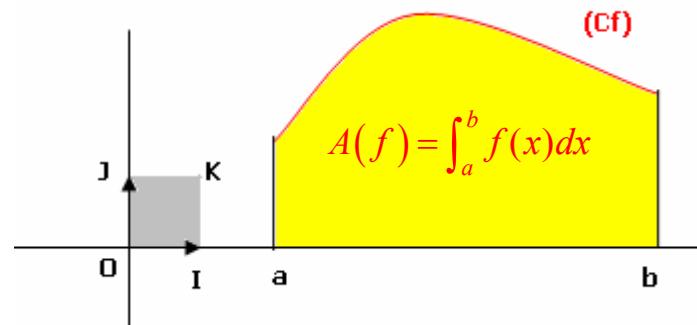
$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

تمرين حدد  $\int_0^\pi \cos^4 x dx$  (يمكن اخطاط  $\int_0^\pi \cos^4 x dx$  ;  $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx$ )

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

تمرين تعتبر  $J$  و  $I$  و  $I - J$  و  $I + J$  وأحسب  $I$  واستنتج  $I$  ;

د- التأويل الهندسى للعدد



خاصية

إذا كانت  $f$  دالة متصلة و موجبة على  $[a; b]$  ( $a < b$ ) فان مساحة الحيز المحصور بين منحني الدالة  $f$  و محور الأفاسيل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلين  $x = a$  و  $x = b$  هي

$$A(f) = \int_a^b f(x) dx$$

ملاحظة إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فان وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

تمرين

$$\left( \|\vec{i}\| = 1\text{cm} \quad \|\vec{j}\| = 2\text{cm} \right) \quad C_f \quad \text{أنشئ}$$

أحسب بـ  $\text{cm}^2$  مساحة الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاسيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين .  $x = 3$  ;  $x = 1$

## II - تقنيات حساب التكاملات

### - الاستعمال المباشر لدوال الأصلية

#### أمثلة

$$u(x) = \ln x \quad \text{على شكل } u'u^2 \quad \text{حيث} \quad \frac{(\ln x)^2}{x} \quad \text{نلاحظ أن} \quad \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx \quad * \quad \text{أحسب}$$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[ \frac{1}{3} u^3(x) \right]_1^e = \left[ \frac{1}{3} \ln^3 x \right]_1^e = \frac{1}{3} \quad \text{إذن} \quad \frac{1}{3} u^3 \quad \text{هي}$$

$$\frac{2}{1+e^x} \quad \text{بهذا التحويل نلاحظ أن} \quad \frac{2}{e^x + 1} = 2 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad \text{لدينا} \quad \int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx \quad * \quad \text{أحسب}$$

$$\int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx = \left[ -2 \ln |u(x)| \right]_0^1 = \left[ -\ln(1+e^{-x}) \right]_0^1 \quad \text{إذن} \quad u(x) = 1+e^{-x} \quad \text{حيث} \quad -2 \frac{u'}{u}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx \quad -1 \quad \text{تمرين}$$

$$\forall x \neq 0 \quad \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2 + 1} \quad -2 \quad \text{أ-} \quad \text{أوجد } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ حيث}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} dx \quad \text{ب-} \quad \text{استنتاج قيمة}$$

$$-3 \quad \text{بين أن التعبير} \quad \frac{1}{2} \frac{u'}{u^2 + 1} \quad \text{يكتب على شكل} \quad \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \quad \text{حيث} \quad u \quad \text{دالة يجبر تحديدها .}$$

$$\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx \quad \text{استنتاج قيمة}$$

$$\left( \frac{1}{x \ln x} = \frac{1}{\ln x} \right) \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \quad -4 \quad \text{أحسب}$$

## 2- المتكاملة بالأجزاء

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين قابلتين للاشتقاق على  $[a;b]$  بحيث  $f'$  و  $g'$  متصلتين على  $[a;b]$   
نعلم أن

$$\forall x \in [a;b] \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\forall x \in [a;b] \quad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

$$v(x) = x \quad ; \quad u'(x) = \cos x \quad \text{وضع} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{أحسب} \quad \text{مثال}$$

$$v'(x) = 1 \quad ; \quad u(x) = \sin x \quad \text{ومنه}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{إذن}$$

تمرين

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \quad ; \quad I = \int_1^e \ln x dx \quad \text{أحسب}$$

الحل

$$K = \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2} \left( \left[ e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[ e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots \dots \dots$$

$$\int_0^1 \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| dx \quad \int_0^1 x \sqrt{x+3} dx \quad \int_0^3 (x-1)e^{2x} dx \quad \int_1^2 x^2 \ln x dx \quad \text{تمرين 1 - أحسب}$$

-2 باستعمال المتكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ  $f$  على  $[a; b]$  حيث

$$(J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt) \quad (I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt) \quad \text{-3 أحسب}$$

III- التكامل و الترتيب1- مقارنة تكاملين

(a) لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $[a; b]$

$$\forall x \in [a; b] \quad F'(x) = f(x) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فإن  $F$  تزايدية على  $[a; b]$

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{إذن} \quad F(a) \leq F(b) \quad \text{وحيث أن } a \leq b \quad \text{فإن}$$

خاصية

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  ( $a \leq b$ )

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

(b) خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$  ( $a \leq b$ )

$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$  فإن  $f \leq g$

مثال

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \quad \text{نؤطر}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq I \leq \int_0^1 x^2 dx \quad \text{ومنه} \quad \forall x \in [0; 1] \quad 1 \leq 1+x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2$$

$$\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3} \quad \text{لدينا} \quad \text{إذن}$$

(c) خصائص

أ- لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  (  $a \leq b$  )

إذا كانت  $f$  سالبة على  $[a; b]$  فان  $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

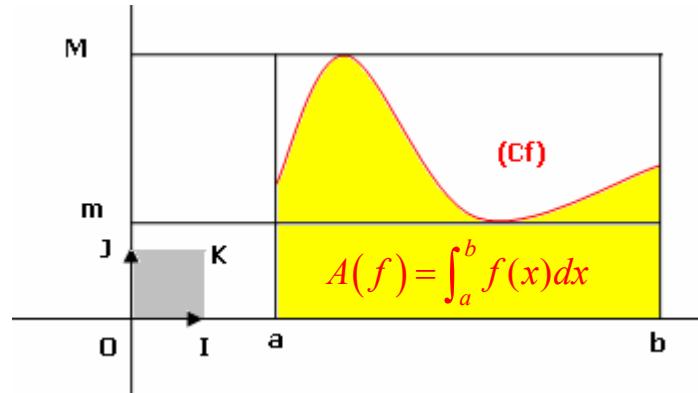
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

ب- لتكن  $M$  القيمة القصوية و  $m$  القيمة الدنيا للدالة  $f$  على  $[a; b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

### ملاحظة

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فان المساحة  $A(f) = \int_a^b f(x) dx$  في معلم م.م محصورة بين مساحتى المستطيل الذي بعديه  $(b-a)$  و المستطيل الذي بعديه  $m$  و  $M$ .



### مثال

نعتبر  $0 \leq I \leq \sqrt{2}$  نبين أن  $I = \int_1^3 \frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} dx$

الدالة  $\sup_{x \in [1;3]} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  موجبة و تناقصية على  $[0; +\infty)$  ومنه

$$0 \leq I \leq (3-1) \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{اذن}$$

### 2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  ( $a < b$ ) و  $M$  القيمة القصوية و  $m$  القيمة الدنيا للدالة  $f$  على  $[a; b]$

إذن  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$  ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل  $c$  في  $[a; b]$

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{حيث}$$

### خاصية و تعريف

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  ( $a \neq b$ )

العدد الحقيقي  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  يسمى القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على  $[a; b]$ .

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad \text{حيث } c \in [a; b] \text{ يوجد على الأقل } c \text{ في } [a; b]$$

### ملاحظة

إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a; b]$  فان المساحة  $A(f) = \int_a^b f(x) dx$  هي مساحة المستطيل الذي بعده  $(b-a)$  و  $f(c)$ .

تمرين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على  $I$  في الحالتين التاليتين

$$I = [0;1] \quad f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 3}{x+1} \quad (b) ; \quad I = [-1;0] \quad f(x) = (x-1)e^x \quad (a)$$

أ- أطْر الدالة  $f$  على  $[0;1]$  حيث  $f(x) = \arctan x$

الجواب عن السؤال 2 لدينا  $f$  قابلة للاشتتقاق على  $[0;1]$  و منه  $\forall x \in [0;1] \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \quad \forall x \in [0;1] \quad \int_0^x \frac{1}{2} dt \leq \int_0^x f'(t) dt \leq \int_0^x 1 dt \quad \forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$$

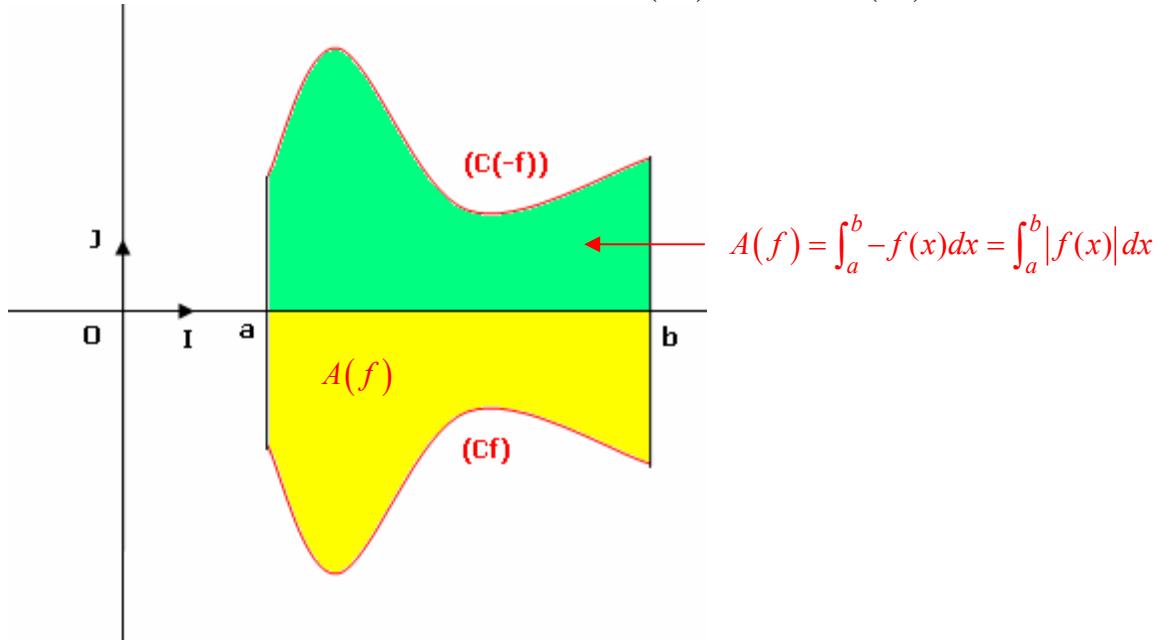
#### IV- حساب المساحات

##### 1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a;b]$  و  $C_f$  منحناها و  $\Delta(f)$  الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاصيل و المستقيمين

$$(\Delta_2) : x = b \quad (\Delta_1) : x = a$$



\*إذا كانت  $f$  موجبة على  $[a;b]$  فان مساحة  $\Delta(f)$  هي بوحدة قياس المساحات

إذا كان  $f$  سالبة على  $[a;b]$  مساحة هي مساحة

$$A(f) = \int_a^b -f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

\*إذا كانت  $f$  تغير إشارتها على  $[a;b]$  مثلا يوجد  $c$  من  $[a;b]$  حيث  $f$  موجبة على  $[a;c]$  و سالبة على

$$[c;b]$$

الحيز  $\Delta(f)$  على  $[a;b]$  هو اتحاد  $\Delta(f)$  على  $[a;c]$  و  $\Delta(f)$  على  $[c;b]$

$$A(f) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

خاصية

المستوى منسوب إلى م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a;b]$  و  $C_f$  منحناها و  $\Delta(f)$  الحيز المحصور بين  $C_f$  و محور الأفاصيل

اصطلاحات

العدد الموجب  $\int_a^b |f(x)| dx$  يسمى المساحة الهندسية للحيز  $f(x)$ .

العدد الحقيقي  $\int_a^b f(x) dx$  يسمى المساحة الجبرية للحيز  $f(x)$ .

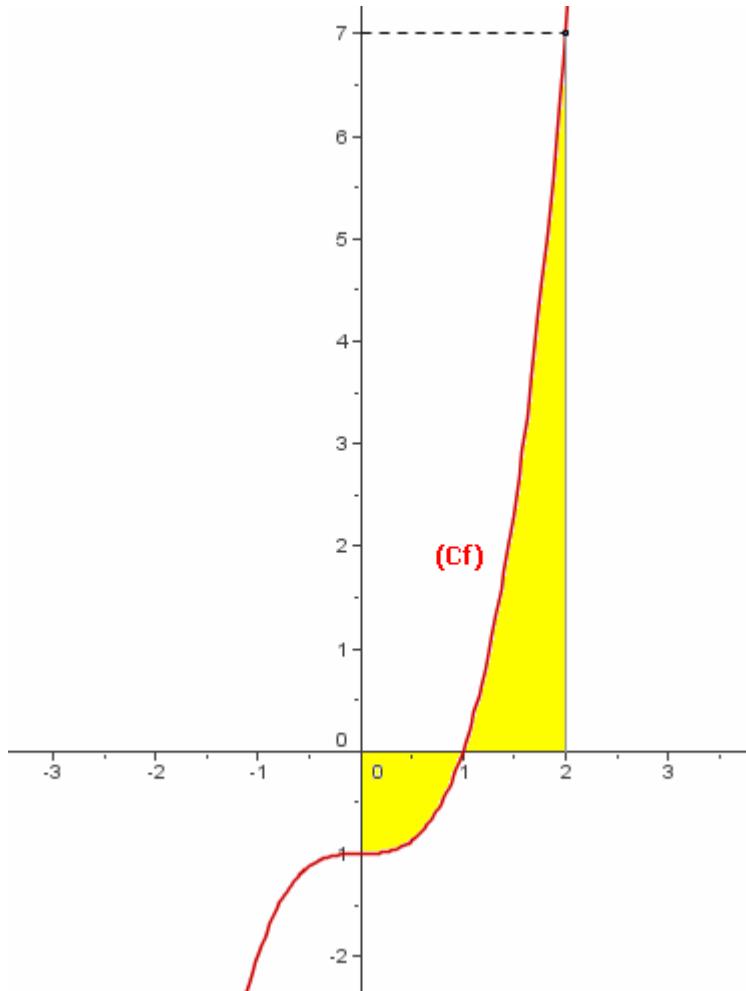
مثال

نعتبر  $f(x) = x^3 - 1$

حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى  $C_f$  و محور الأفاسيل و المستقيمين ذا المعادلتين

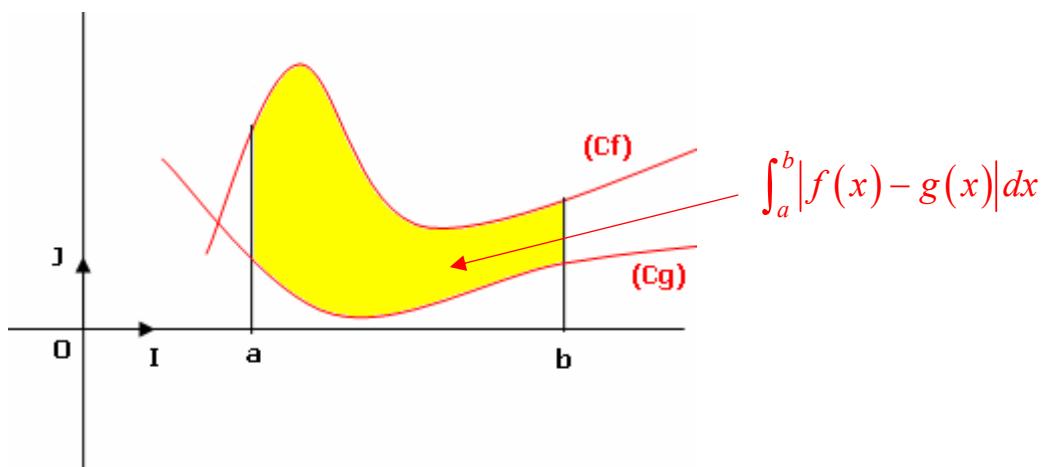
$$x = 2 \quad ; \quad x = 0$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x)| dx \\ A &= \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx \\ A &= \frac{7}{2} u \quad (u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|) \end{aligned}$$

2- مساحة حيز محصور بين منحنيين

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$

و  $\Delta$  هو الحيز المحصور بين  $C_f$  و  $C_g$  و المستقيمين



إذا كان  $f \geq g \geq 0$  فإن  $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

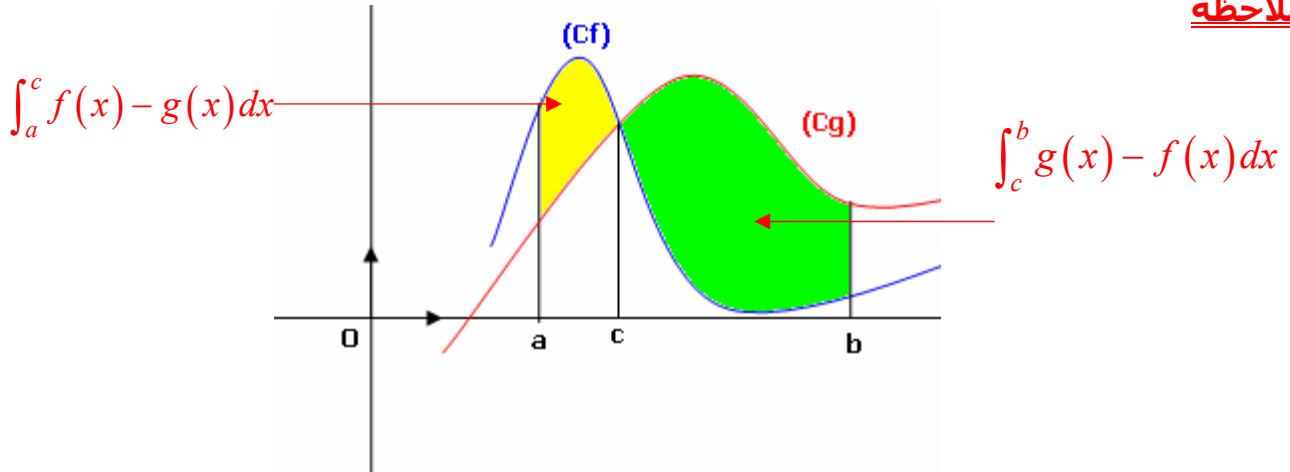
إذا كانت  $f \leq g$  و كيما كانت إشارتي  $f$  و  $g$  و ياتي نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

### خاصية

لتكن  $f$  و  $g$  دالتين متصلتين على  $[a; b]$   
 $(\Delta_2) : x = b$        $(\Delta_1) : x = a$       مساحة الحيز  $\Delta$  المحصور بين  $C_f$  و  $C_g$  المستقيمين  
 $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$  هي وحدة قياس المساحات

### ملاحظة



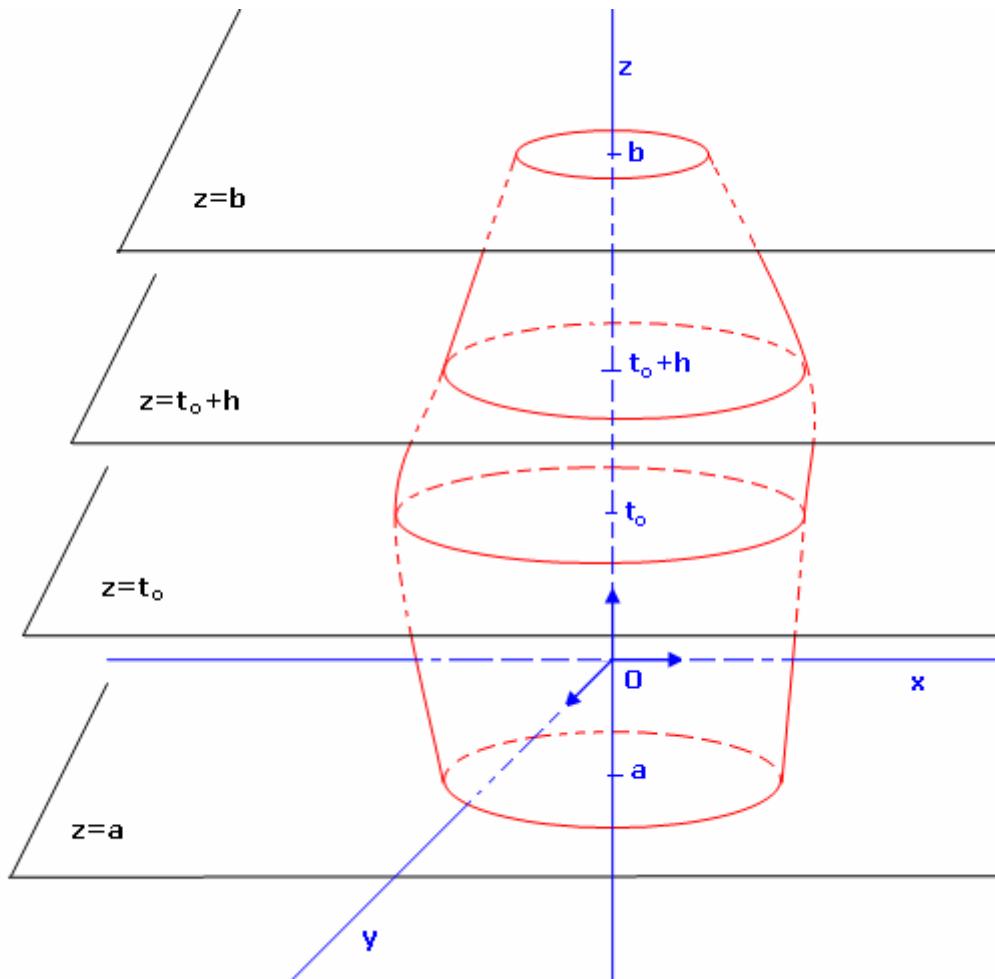
$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

### ٧- حساب الحجوم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه  $\|\vec{i}\|$

### ١- حجم مجسم في الفضاء

ليكن  $S$  مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين  $z = b$  و  $z = a$  و  $z = t$  حيث  $t$  من  $S$  إلى مساحة مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من  $S$  وبالرمز  $V(t)$  إلى حجم مجموعة النقط من  $S$  المحصور بين المستويين  $z = t$  ;  $z = a$  عددًا موجبا حيث  $t_0 + h \in [a; b]$  و  $h$  لikan  $t_0$  من  $[a; b]$



حجم مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من  $S$  المحصورة بين  $z = t_0$  و  $z = t_0 + h$  هو  $V(t_0 + h) - V(t_0)$  ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما  $h$  و مساحتها قاعدتهما على التوالي  $S(t_0 + h)$  و  $S(t_0)$

إذا افترضنا أن  $S(t_0) \leq S(t_0 + h)$  فإن  $S(t_0) \leq S(t_0 + h) \leq h \cdot S(t_0 + h)$

$$S(t_0) \leq \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} \leq S(t_0 + h)$$

و إذا افترضنا أن التطبيق  $t \rightarrow S(t)$  متصل على  $t \rightarrow V(t)$  فإن  $S(t_0)$  قابلة للاشتلاق على  $[a; b]$

إذن الدالة  $t \rightarrow V(t)$  قابلة للاشتلاق على  $[a; b]$  و  $V'(t) = S(t)$

أي أن الدالة  $t \rightarrow S(t)$  دالة أصلية للدالة  $t \rightarrow V(t)$  على  $[a; b]$

$$\forall t \in [a; b] \quad V(t) = \int_a^t S(x) dx$$

إذن حجم المجسم  $S$  هو  $V = V(b) = \int_a^b S(x) dx$  وحدة قياس الحجم.

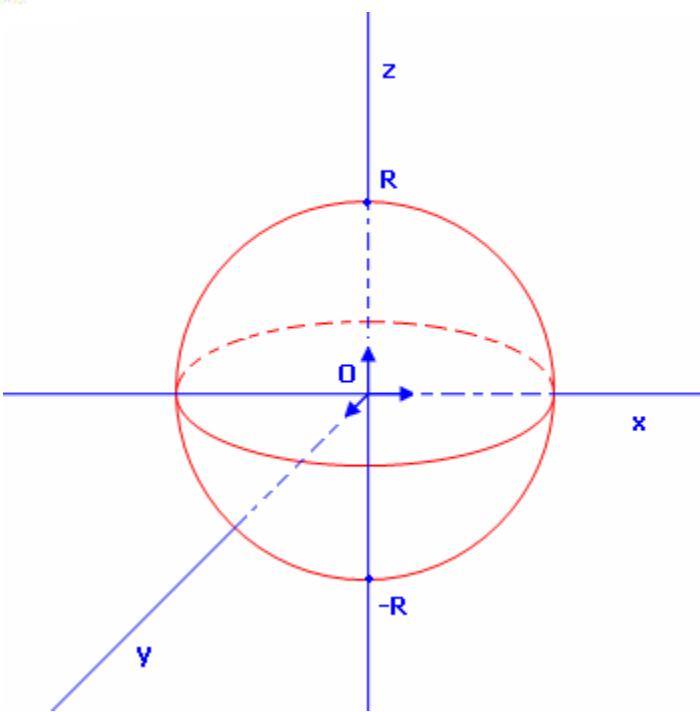
### خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن  $S$  مجسمًا محصوراً بين المستويين المعرفتين بالمعادلتين  $z = b$  و  $z = a$  و  $z = t$

نرمز بـ  $S(t)$  إلى مساحة مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من  $S$  حيث

إذا كان أن التطبيق  $t \rightarrow S(t)$  متصل على  $[a; b]$  فإن حجم المجسم  $S$  هو  $V = \int_a^b S(z) dz$  وحدة قياس الحجم.



**تمرين**  
أحسب حجم الفلكة التي مركزها  $O$  وشعاعها  $R$ .  
الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله  $O$ .  
الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي  
 $z = -R$  ;  $z = R$

مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفلكة حيث

$$-R \leq t \leq R \quad \text{هي قرص شعاعه}$$

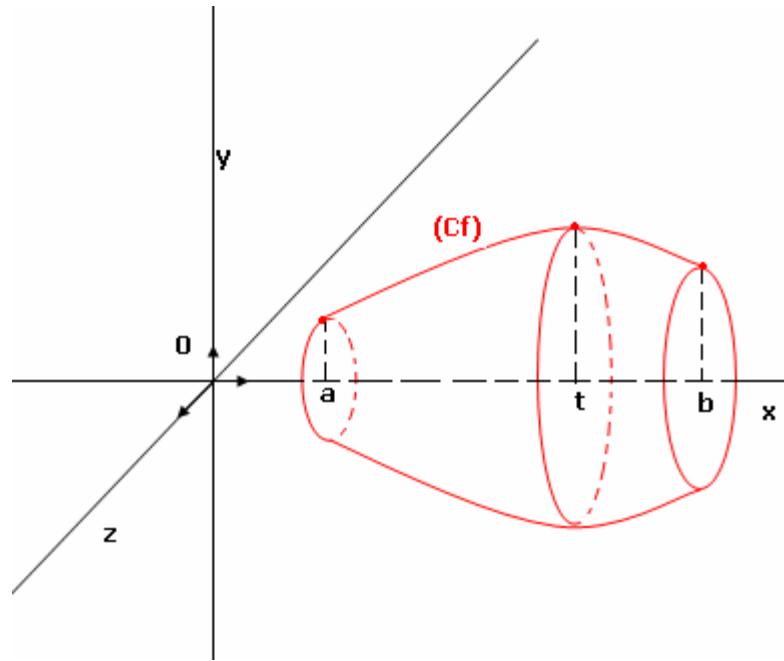
$$S(t) = \pi(R^2 - t^2) \quad \text{و مساحته}$$

بما أن التطبيق  $t \rightarrow \pi(R^2 - t^2)$  متصلة على  $[-R; R]$

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - t^2) dt = \frac{4}{3}\pi R^3$$

## 2- حجم مجسم الدوران

لتكن  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$  و  $C_f$  منحناها في م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   
إذا دار  $C_f$  حول المحور  $(O; \vec{i})$  دورة كاملة فإنه يولد مجسمًا يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الجسم بحيث  $x = t$  هي قرص مساحته

$$S(t) = \pi f^2(t)$$

التطبيق  $t \rightarrow \pi f^2(t)$  متصلة على  $[a; b]$

$$V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$$

**خاصية**

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله  $o$  ، و  $f$  دالة متصلة على  $[a; b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحني  $C_f$  حول المحور  $(OX)$  هو  
بوحدة قياس الحجم .

$$f(x) = \frac{1}{2}x \ln x$$

نعتبر  $f(x) = \frac{1}{2}x \ln x$  أنشئ  $C_f$  و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى  $C_f$  حول المحور ( $OX$ ) في المجال  $[1;e]$