

التكامل

I- تكامل دالة متصلة على مجال

1- تعريف و ترميز

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I .
إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإن $F(b)-F(a)=G(b)-G(a)$.
أي أن العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ غير مرتبط باختيار الدالة الأصلية F .

تعريف

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من I .
العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f على I , يسمى تكامل الدالة f من a إلى b
ويكتب $\int_a^b f(x) dx$ ويقرأ مجموع $f(x) dx$ من a إلى b أو تكامل من a إلى b لـ $f(x) dx$.

a و b يسميا محدا التكامل $\int_a^b f(x) dx$

في الكتابة $\int_a^b f(x) dx$ يمكن تعويض x بأي حرف آخر ، بمعنى أن

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \dots\dots$$

من أجل تبسيط الكتابة $F(b)-F(a)$ نكتبها على الشكل $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$

أمثلة

$$* \text{ نحسب } \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ متصلة على $[1;2]$ و دالة أصلية لها هي $x \rightarrow \ln x$

$$\text{اذن } \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$$

$$* \text{ أحسب } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad ; \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos x dx$$

2- خاصيات

أ- خاصيات

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b و c عناصر من I

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad * \quad \int_a^a f(x) dx = 0 \quad *$$

$$* \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{علاقة شال})$$

أمثلة

$$\text{أحسب } I = \int_{-1}^1 |x| dx$$

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 1$$

(ب-) لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$$

لدينا $\forall x \in I \quad \varphi(x) = F(x) - F(a)$ حيث F دالة أصلية لـ f على I .

اذن φ قابلة للاشتقاق على I و $\varphi' = f$ أي أن $\varphi(a) = 0$ دالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم

في a

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a عنصرا من I .

الدالة المعرفة على I بما يلي $x \rightarrow \int_a^x f(t) dt$ هي الدالة الأصلية لـ f على I التي تنعدم في a

مثال

نعلم أن الدالة $x \rightarrow \ln x$ هي الدالة الأصلية لـ $x \rightarrow \frac{1}{x}$ على $]0; +\infty[$ التي تنعدم في 1.

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

تمرين حدد الدالة الأصلية لـ f على $]0; +\infty[$ التي تنعدم في 2 حيث $\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) = \frac{1}{x} \ln x$

(ج) - خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ و λ عدد حقيقي ثابت

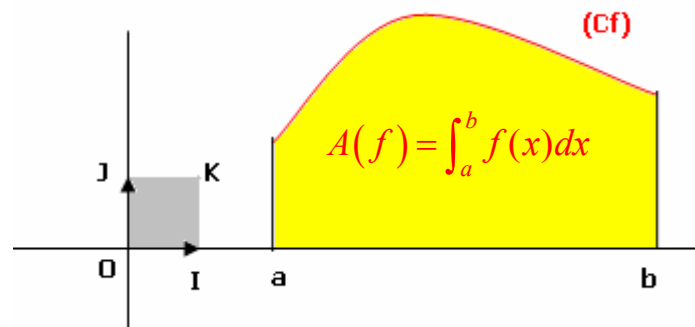
$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

تمرين حدد $\int_0^1 (x^2 - 3x + 1) dx$; $\int_0^\pi \cos^4 x dx$ (يمكن اخطا $\cos^4 x$)

تمرين نعتبر $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

أحسب $I + J$ و $I - J$ واستنتج I ; J

د التآويل الهندسى للعدد $\int_a^b f(x) dx$



خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على $[a; b]$ ($a < b$) فإن مساحة الحيز المحصور بين منحنى الدالة f و محور الأفاصل و المستقيمين المعرفتين على التوالي بالمعادلتين $x = a$ و $x = b$ هي

$$A(f) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{بوحدّة قياس المساحات}$$

ملاحظة

إذا كان المستوى منسوب إلى معلم متعامدين فإن وحدة قياس المساحة هي مساحة المربع OIJK

تمرين

$$\text{نعتبر } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{أنشئ } C_f \quad (\|\vec{i}\| = 1\text{cm} \quad \|\vec{j}\| = 2\text{cm})$$

أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=1$; $x=3$.

II- تقنيات حساب التكاملات

1- الاستعمال المباشر لدوال الأصلية أمثلة

* أحسب $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ نلاحظ أن $\frac{(\ln x)^2}{x}$ على شكل $u'u^2$ حيث $u(x) = \ln x$

و نعلم أن الدالة الأصلية لـ $u'u^2$ هي $\frac{1}{3}u^3$ إذن $\frac{1}{3}$ $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \left[\frac{1}{3}u^3(x) \right]_1^e = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x \right]_1^e = \frac{1}{3}$

* أحسب $\int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx$ لدينا $\frac{2}{e^x + 1} = 2 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ بهذا التحويل نلاحظ أن $\frac{2}{1 + e^x}$ يكتب على شكل

$-\frac{2}{u} u'$ حيث $u(x) = 1 + e^{-x}$ إذن $\int_0^1 \frac{2}{e^x + 1} dx = \left[-2 \ln |u(x)| \right]_0^1 = \left[-\ln(1 + e^{-x}) \right]_0^1$

1- تمرين حدد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$

2- أ- أوجد a و b و c حيث $\forall x \neq 0 \quad \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} = ax + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2 + 1}$

ب- استنتج قيمة $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x^4 + x^2 + x - 1}{x^3 + x} dx$

3- بين أن التعبير $\frac{1}{x^2 - 2x + 5}$ يكتب على شكل $\frac{1}{2} \frac{u'}{u^2 + 1}$ حيث u دالة يجب تحديدها .

استنتج قيمة $\int_1^{1+2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx$

4- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$; $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$ $\left(\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \right)$

2- المكاملة بالأجزاء

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على $[a; b]$ بحيث f' و g' متصلتين على $[a; b]$ نعلم أن

$$\forall x \in [a; b] \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\forall x \in [a; b] \quad f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$$

خاصية

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [(fg)(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

مثال أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ نضع $u'(x) = \cos x$; $v(x) = x$

ومنه $u(x) = \sin x$; $v'(x) = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{إذن}$$

تمرين

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx \quad ; \quad I = \int_1^e \ln x dx \quad \text{أحسب}$$

الحل

$$K = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - K$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \dots\dots\dots$$

$$\int_0^1 \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| dx \quad \int_0^1 x \sqrt{x+3} dx \quad \int_0^3 (x-1)e^{2x} dx \quad \int_1^2 x^2 \ln x dx \quad \text{أحسب} \quad \text{1- تمرين}$$

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \quad \text{حيث} \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{2- باستعمال المكاملة بالأجزاء أوجد الدوال الأصلية لـ } f \text{ على}$$

$$3- \text{أحسب} \quad I = \int_0^x e^t \cos^2 t dt \quad (J = \int_0^x e^t \sin^2 t dt \text{ يمكن اعتبار})$$

III- التكامل و الترتيب1- مقارنة تكاملين

(a) لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و F دالة أصلية لـ f على $[a; b]$

$$\forall x \in [a; b] \quad F'(x) = f(x) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن F تزايدية على $[a; b]$

$$\text{وحيث أن } a \leq b \text{ فإن } F(a) \leq F(b) \quad \text{إذن} \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

خاصية

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \leq b$)

$$\text{إذا كانت } f \text{ موجبة على } [a; b] \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

(b) خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ ($a \leq b$)

$$\text{إذا كانت } f \leq g \text{ على } [a; b] \text{ فإن } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

مثال

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \quad \text{نؤطر}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq I \leq \int_0^1 x^2 dx \quad \text{ومنه} \quad \forall x \in [0; 1] \quad 1 \leq 1+x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2 \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3} \quad \text{إذن}$$

(c) خاصيات

أ- لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \leq b$)

إذا كانت f سالبة على $[a; b]$ فإن $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

$$- \text{ب-} \quad \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

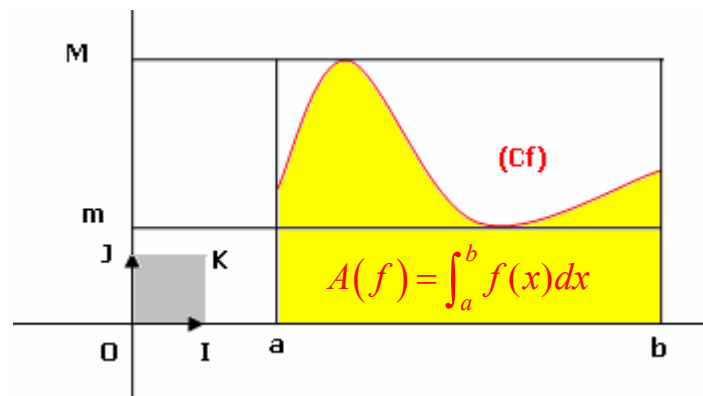
ج- لتكن M القيمة القصوى و m القيمة الدنيا للدالة f على $[a; b]$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن المساحة $A(f) = \int_a^b f(x) dx$ في معلم م.م محصورة بين

مساحتي المستطيل الذي بعديه M و $(b-a)$ والمستطيل الذي بعديه m و $(b-a)$.



مثال

نعتبر $I = \int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$ نبين أن $0 \leq I \leq \sqrt{2}$

الدالة $x \rightarrow \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ موجبة و تناقصية على $]0; +\infty[$ ومنه $\sup_{x \in [1;3]} f(x) = f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{اذن} \quad 0 \leq I \leq (3-1) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2- القيمة المتوسطة لدالة متصلة في قطعة

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a < b$) و M القيمة القصوى و m القيمة الدنيا للدالة f على $[a; b]$

إذن $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية يوجد على الأقل c في $[a; b]$

$$\text{حيث} \quad f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

خاصية وتعريف

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ ($a \neq b$)

العدد الحقيقي $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على $[a; b]$.

يوجد على الأقل c في $[a; b]$ حيث $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

ملاحظة

إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن المساحة $A(f) = \int_a^b f(x) dx$ في معلم م.م هي مساحة

المستطيل

الذي بعده $(b-a)$ و $f(c)$.

تمارين 1- أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على I في الحالتين التاليتين

$$I = [0;1] \quad f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + x + 3}{x+1} \quad (b \quad ; \quad I = [-1;0] \quad f(x) = (x-1)e^x \quad (a$$

2- أطر الدالة f على $[0;1]$ حيث $f(x) = \arctan x$

الجواب عن السؤال 2 لدينا f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in [0;1]$ و منه

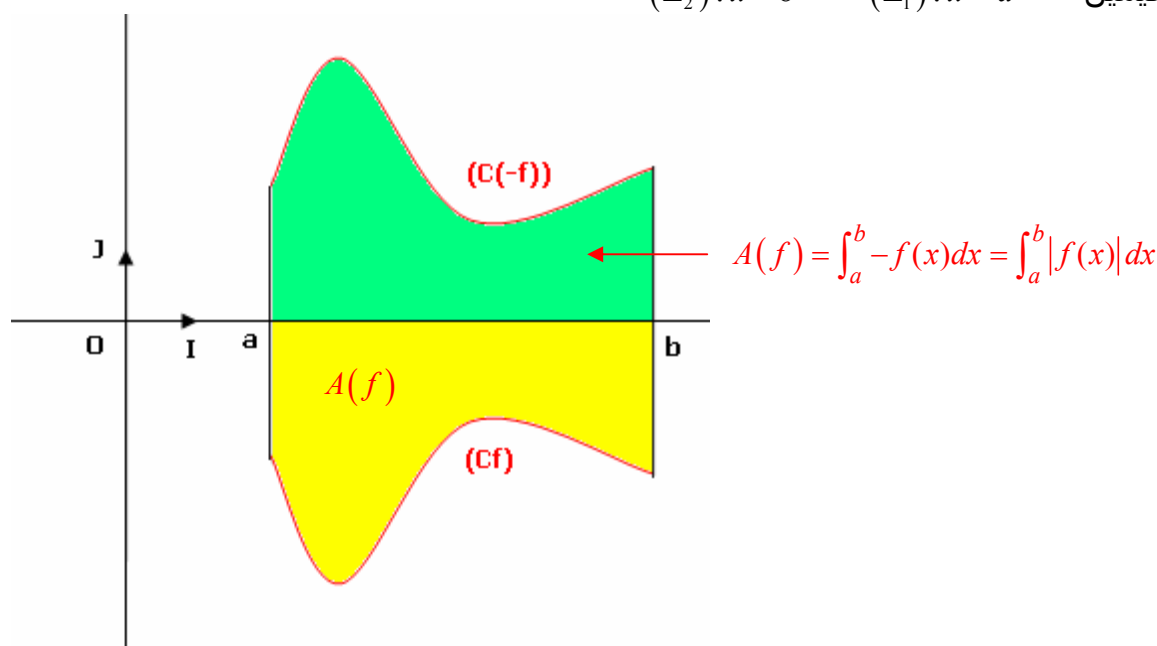
$$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \quad \forall x \in [0;1] \quad \int_0^x \frac{1}{2} dt \leq \int_0^x f'(t) dt \leq \int_0^x dt \quad \text{اذن} \quad \forall x \in [0;1] \quad \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 1$$

IV- حساب المساحات

1- حساب المساحات الهندسية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفصيل و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$



* إذا كانت f موجبة على $[a; b]$ فإن مساحة $\Delta(f)$ هي $\int_a^b f(x) dx$ بوحدة قياس المساحات

* إذا كان كانت f سالبة على $[a; b]$ مساحة هي مساحة $\Delta(-f)$

$$A(f) = \int_a^b -f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

* إذا كانت f تغير إشارتها على $[a; b]$ مثلاً يوجد c من $[a; b]$ حيث f موجبة على $[a; c]$ و سالبة على $[c; b]$

الحيز $\Delta(f)$ على $[a; b]$ هو اتحاد $\Delta(f)$ على $[a; c]$ و $\Delta(f)$ على $[c; b]$

$$A(f) = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b -f(x) dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

خاصية

المستوى منسوب إلى م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحناها و $\Delta(f)$ الحيز المحصور بين C_f و محور الأفصيل

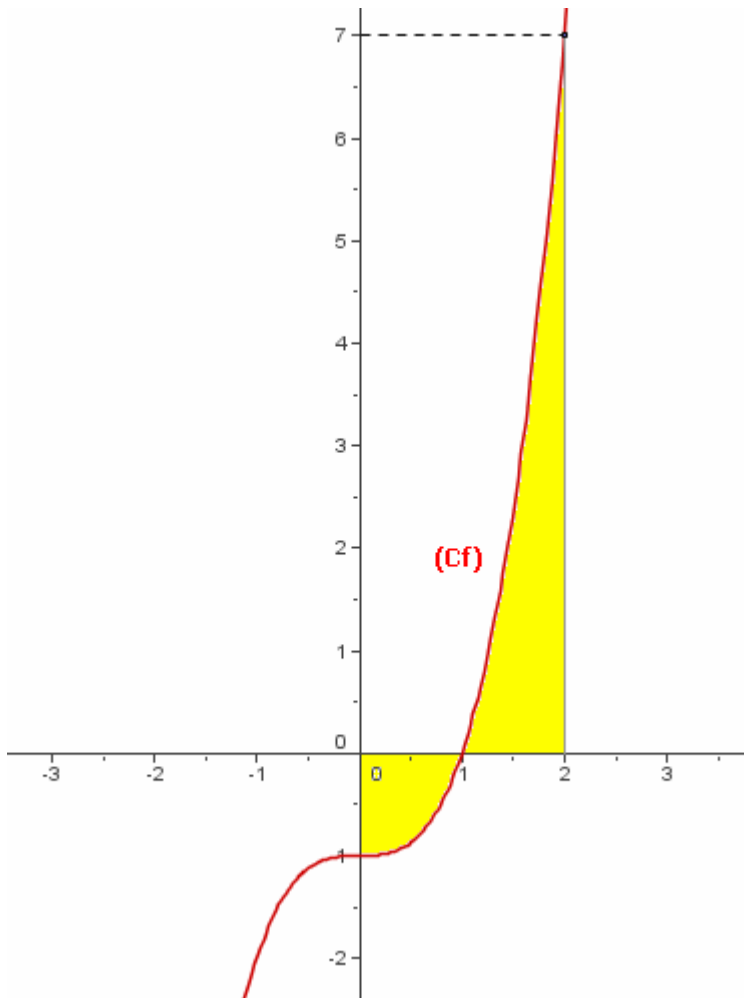
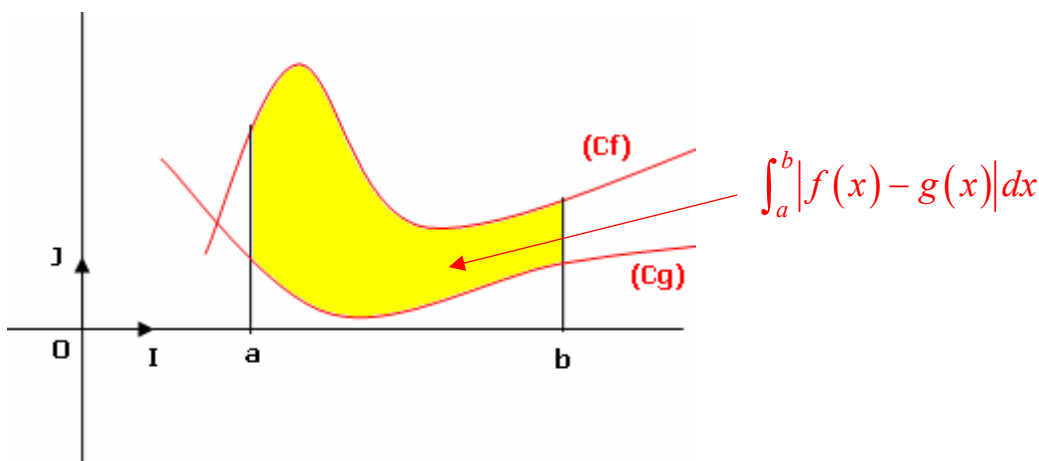
والمستقيمين $(\Delta_2): x = b$ $(\Delta_1): x = a$ مساحة الحيز $\Delta(f)$ هو $\int_a^b |f(x)| dx$ بوحدة قياس المساحةاصطلاحاتالعدد الموجب $\int_a^b |f(x)| dx$ يسمى المساحة الهندسية للحيز $\Delta(f)$.العدد الحقيقي $\int_a^b f(x) dx$ يسمى المساحة الجبرية للحيز $\Delta(f)$.مثالنعتبر $f(x) = x^3 - 1$ حدد مساحة الحيز المحصور بين المنحنى C_f و محور الأفصيل و المستقيمين ذا المعادلتين

$$x = 2 \quad ; \quad x = 0$$

$$A = \int_0^2 |f(x)| dx$$

$$A = \int_0^1 (1 - x^3) dx + \int_1^2 (x^3 - 1) dx$$

$$A = \frac{7}{2} u \quad (u = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|)$$

-2 مساحة حيز محصور بين منحنيينلتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ و Δ هو الحيز المحصور بين C_g و C_f و المستقيمين $(\Delta_1): x = a$ $(\Delta_2): x = b$ في م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j})$ 

إذا كان $f \geq g \geq 0$ فإن $A(\Delta) = A(f) - A(g)$

$$A(\Delta) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

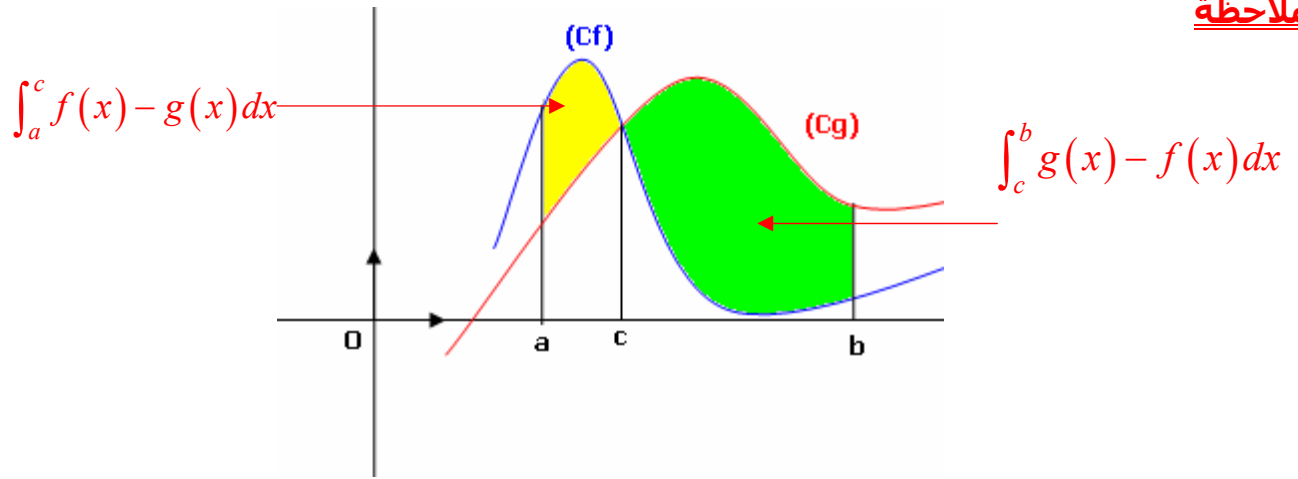
إذا كانت $f \leq g$ و كيفما كانت إشارتي f و g و يتابع نفس الطريقة نحصل على أن

$$A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

خاصية

لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$
مساحة الحيز Δ المحصور بين C_g و C_f والمستقيمين $(\Delta_1): x = a$ و $(\Delta_2): x = b$
هي $A(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ وحدة قياس المساحات

ملاحظة



$$A(\Delta) = \int_a^c (f(x) - g(x)) dx + \int_c^b (g(x) - f(x)) dx$$

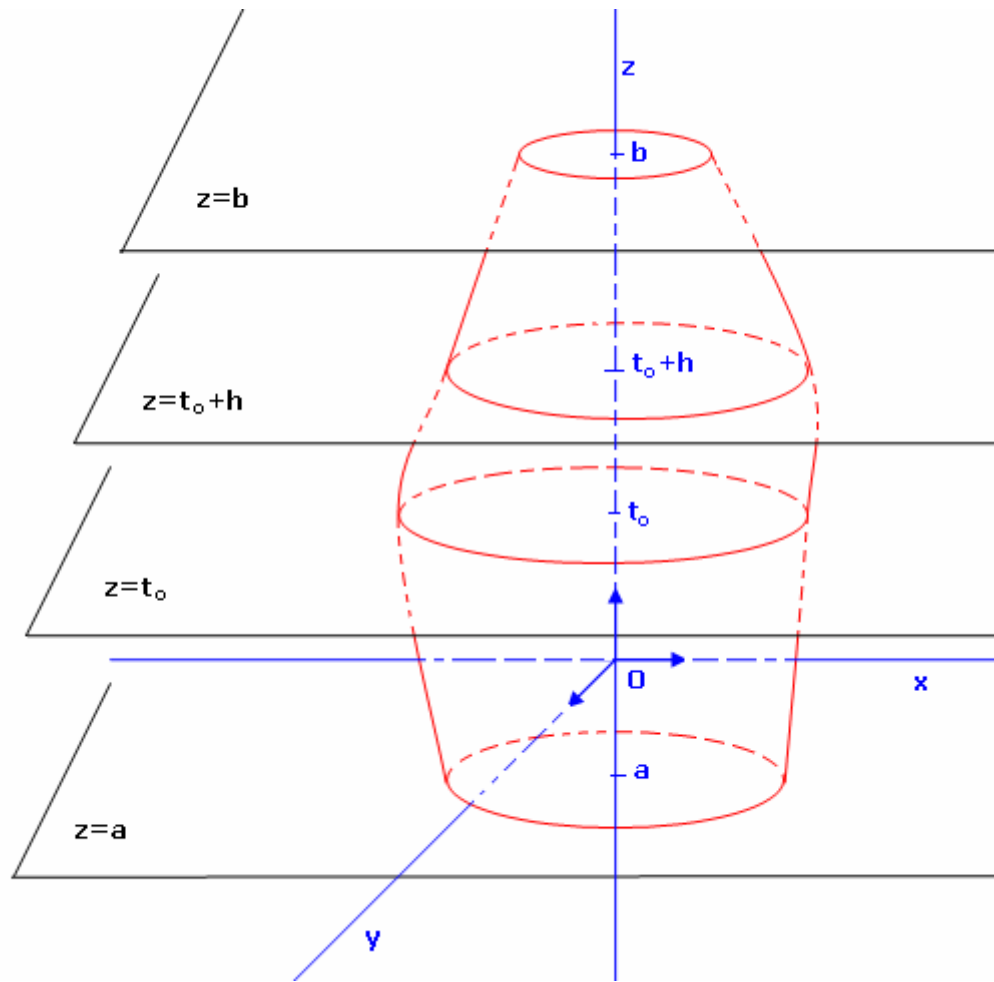
V- حساب الحجوم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم م.م $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نفترض أن وحدة قياس الحجم هي حجم المكعب الذي طول حرفه

$\|\vec{i}\|$

1- حجم محسم في الفضاء

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$
نرمز بـ $S(t)$ إلى مساحة مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S حيث $z = t$ و بالرمز $V(t)$ إلى حجم مجموعة
النقط من S المحصور بين المستويين $z = a$ و $z = t$;
ليكن t_0 من $[a; b]$ و h عددا موجبا حيث $t_0 + h \in [a; b]$



حجم مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S المحصورة بين $z = t_0$ و $z = t_0 + h$ هو $V(t_0 + h) - V(t_0)$ ومن جهة ثانية هذا الحجم محصور بين حجمي الأسطوانتين التي ارتفاعهما h و مساحتا قاعدتيهما على التوالي $S(t_0)$ و $S(t_0 + h)$

إذا افترضنا أن $S(t_0) \leq S(t_0 + h)$ فإن $h \cdot S(t_0) \leq V(t_0 + h) - V(t_0) \leq h \cdot S(t_0 + h)$

$$S(t_0) \leq \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} \leq S(t_0 + h) \text{ و منه}$$

و إذا افترضنا أن التطبيق $t \rightarrow S(t)$ متصل على $[a; b]$ فإن $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h} = S(t_0)$

إذن الدالة $t \rightarrow V(t)$ قابلة للاشتقاق على $[a; b]$ و $V'(t) = S(t)$ $\forall t \in [a; b]$

أي أن الدالة $t \rightarrow V(t)$ دالة أصلية للدالة $t \rightarrow S(t)$ على $[a; b]$

و بما أن $V(a) = 0$ فإن $V(t) = \int_a^t S(x) dx$ $\forall t \in [a; b]$

إذن حجم المجسم S هو $V = V(b) = \int_a^b S(x) dx$ وحدة قياس الحجم .

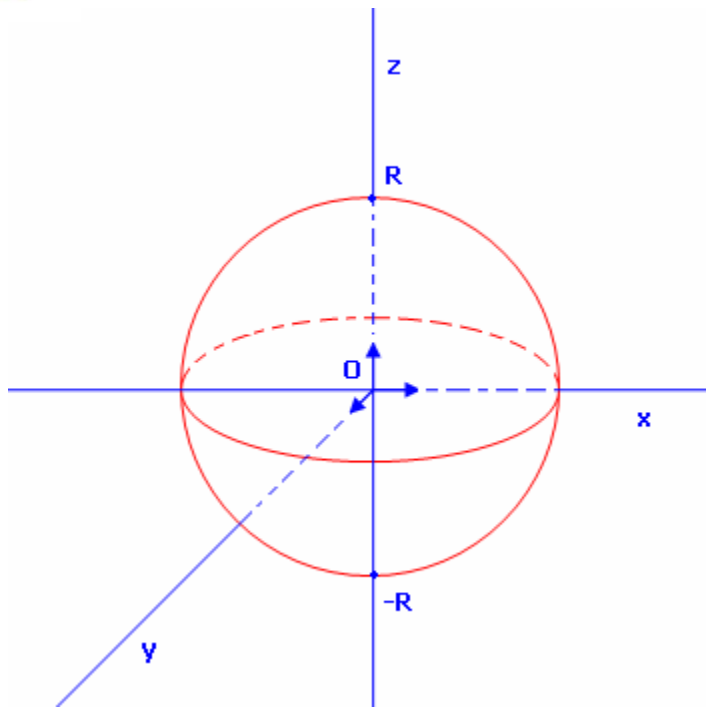
خاصية

الفضاء منسوب إلى معلم م.م

ليكن S مجسما محصورا بين المستويين المعرفين بالمعادلتين $z = a$ و $z = b$

نرمز بـ $S(t)$ الى مساحة مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من S حيث $z = t$

إذا كان أن التطبيق $t \rightarrow S(t)$ متصلا على $[a; b]$ فإن حجم المجسم S هو $V = \int_a^b S(z) dz$ وحدة قياس الحجم.



تمرين

أحسب حجم الفلكة التي مركزها O و شعاعها R
 الحل : نفترض أن الفضاء منسوب م.م.م أصله O .
 الفلكة محصورة بين المستويين المعرفين على التوالي
 بالمعادلتين $z = -R$; $z = R$

مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفلكة حيث $z = t$

$-R \leq t \leq R$ هي قرص شعاعه $\sqrt{R^2 - t^2}$

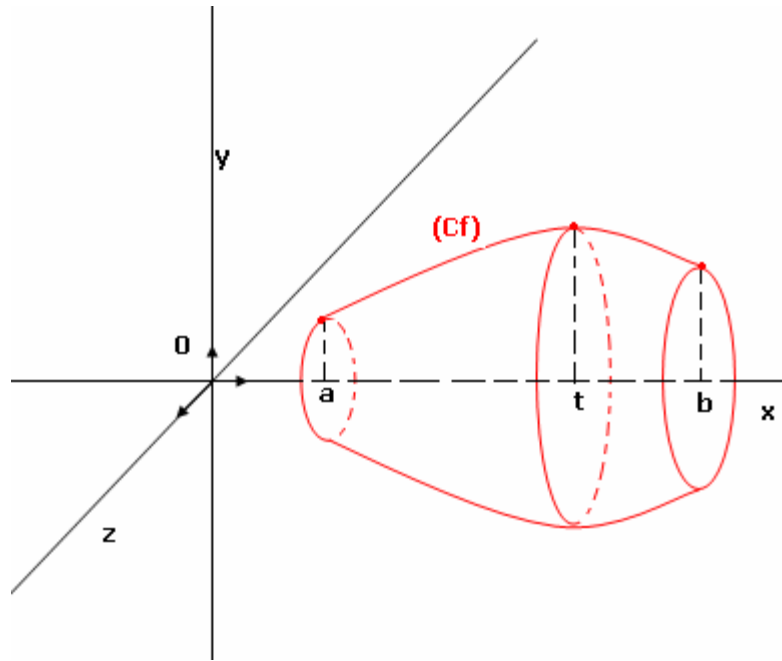
و مساحته $S(t) = \pi(R^2 - t^2)$

بما أن التطبيق $t \rightarrow \pi(R^2 - t^2)$ متصل على $[-R; R]$

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - t^2) dt = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ فان}$$

2- حجم مجسم الدوران

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و C_f منحناها في م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 إذا دار C_f حول المحور $(O; \vec{i})$ دورة كاملة فانه يولد مجسما يسمى مجسم الدوران



في هذه الحالة لدينا مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الجسم بحيث $x = t$ هي قرص مساحته

$$S(t) = \pi f^2(t)$$

التطبيق $t \rightarrow \pi f^2(t)$ متصل على $[a; b]$

إذن حجم المجسم الدوراني هو $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$

خاصية

الفضاء منسوب إلى م.م.م أصله O , و f دالة متصلة على $[a; b]$

حجم مجسم الدوران المولد عن دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) هو $V = \int_a^b \pi f^2(t) dt$
 بوحدة قياس الحجم .

$$f(x) = \frac{1}{2}x \ln x \text{ نعتبر}$$

أنشئ C_f و حدد حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران المنحنى C_f حول المحور (OX) في المجال $[1; e]$