

أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مادة الرياضيات	الأستاذ : عثمان نجيب مذكرة رقم 10/
--------------------------------------	----------------	---------------------------------------

مستوى : السنة الثانية من سلك البكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 10 في درس المعادلات التفاضلية

القدرات المنتظرة

- حل المعادلة : $y' = ay + b$
- حل المعادلة : $y'' + ay' + by = 0$

I. المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$:

نشاط: نعتبر المعادلة التالية : $y' - 2 = 0$ (E)

(1) هل الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 2x + 5$

حل للمعادلة (E) ؟

(2) ما هو الفرق بين معادلة عادية ومثل هذه المعادلات ؟

(3) هل هناك أكثر من حل للمعادلة (E) ؟

تعريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.

المعادلة $y' = ay + b$, حيث المجهول هو دالة عددية y و y'

مشتقتها. تسمى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى.

كل دالة عددية f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق المتساوية

$f'(x) = af(x) + b$, لكل x من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة

التفاضلية $y' = ay + b$.

ملحوظة:

حل المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ يعني تحديد الدوال العددية f

القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق هذه المعادلة.

خاصية: ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين.

حلول المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$ هي الدوال العددية المعرفة

على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{\frac{b}{a}} - \frac{b}{a}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

مثال: حل المعادلة التفاضلية: $2y' - 4y - 3 = 0$ (E)

الجواب: نكتبها أولا على الشكل : $y' = ay + b$

$2y' - 4y - 3 = 0$ يعني $2y' = 4y + 3$

يعني $y' = \frac{4y+3}{2}$ يعني $y' = 2y + \frac{3}{2}$

اذن: $a = 2$ و $b = \frac{3}{2}$

ومنه : حلول المعادلة التفاضلية: (E) هي الدوال العددية المعرفة

على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{2x} - \frac{3}{4}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

تمرين 1: حل المعادلة التفاضلية: $\frac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0$ (E)

(2) حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق :

$$f'(0) = -2$$

الجواب (1): نكتبها أولا على الشكل : $y' = ay + b$

$$\frac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0 \text{ يعني } y' = -6y + 2$$

اذن: $a = -6$ و $b = 2$

ومنه : حلول المعادلة التفاضلية: (E) هي الدوال العددية المعرفة

على $\mathbb{R}$ بما يلي: $x \mapsto ke^{-6x} + \frac{1}{3}$ حيث $k \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = ke^{-6x} + \frac{1}{3}$$

نحسب : $f'(x)$

$$f'(x) = (ke^{-6x} + \frac{1}{3})' = -6ke^{-6x}$$

$$f'(0) = -2 \text{ يعني } -6ke^0 = -2 \text{ يعني } k = \frac{1}{3}$$

$$\text{ومنه : } f(x) = \frac{1}{3}e^{-6x} + \frac{1}{3}$$

II. المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$:

$y'' + ay' + by = 0$ معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.

$$r^2 + ar + b = 0 \text{ معادلتها المميزة}$$

خاصية: لتكن المعادلة التفاضلية: $y'' + ay' + by = 0$ (E) و

معادلتها المميزة $r^2 + ar + b = 0$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

■ إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين r_1 و r_2 , فإن

حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \text{ حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

■ إذا كانت للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج r_0 , فإن حلول

المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{r_0 x} \text{ حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

■ إذا كانت المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$

و $r_2 = p - iq$, فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال

لدينا: إذن المعادلة المميزة تقبل حل حقيقي مزدوج $r_0 = 1$ ، هو: $r_0 = 1$

لدينا: $\Delta = -36 = (6i)^2$ إذن المعادلة المميزة تقبل حلين عقديين

$$\text{مترافقين: } r_1 = \frac{4+i6}{2} \text{ و } r_2 = \frac{4-i6}{2} \text{ أي:}$$

$$r_1 = 2+3i = p+iq \text{ و } r_2 = 2-3i = p-iq, \text{ ومنه حلول}$$

المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة $\mathbb{R}$ على بما يلي:

$$x \mapsto e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) \text{ حيث } \alpha \text{ و } \beta \text{ عدنان حقيقيان.}$$

$$f(x) = e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) \quad (2)$$

نحسب: $f'(x)$

$$f'(x) = (e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x))'$$

$$= (e^{2x})' (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x)'$$

$$= 2e^{2x} (\alpha \cos 3x + \beta \sin 3x) + e^{2x} (-3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x)$$

$$f'(x) = e^{2x} (2\alpha \cos 3x + 2\beta \sin 3x - 3\alpha \sin 3x + 3\beta \cos 3x)$$

$$f'(x) = e^{2x} ((2\alpha + 3\beta) \cos 3x + (2\beta - 3\alpha) \sin 3x)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } f(x) = e^{2x} \left(0 \times \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x$$

تمرين 2: حل المعادلة التفاضلية $y' = 7y - 5$ بحيث

$$y(0) = -6$$

$$\text{الجواب: } y(x) = \lambda e^{7x} + \frac{5}{7} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$\lambda + \frac{5}{7} = -6 \quad \text{إذن: } y(0) = -6 \quad \text{ولدينا: } y(0) = \lambda + \frac{5}{7}$$

$$\text{إذن: } \lambda = -\frac{47}{7} \quad \text{ومنه: } y(x) = -\frac{47}{7} e^{7x} + \frac{5}{7}$$

تمرين 3: حل المعادلة التفاضلية $y'' - 15y' + 56y = 0$

$$\text{بحيث: } y'(0) = 9; \quad y(0) = -3$$

$$\text{الجواب: المعادلة المميزة: } r^2 - 15r + 56 = 0$$

$$\text{نجد: } r_1 = 7 \quad \text{و} \quad r_2 = 8$$

$$\text{إذن: } y(x) = \alpha e^{7x} + \beta e^{8x}$$

$$y'(x) = 7\alpha e^{7x} + 8\beta e^{8x}$$

$$\begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 9 \end{cases} \quad \text{ولدينا} \quad \begin{cases} y(0) = \alpha + \beta \\ y'(0) = 7\alpha + 8\beta \end{cases}$$

$$\text{إذن: } \begin{cases} \alpha + \beta = -3 \\ 7\alpha + 8\beta = 9 \end{cases} \quad \text{نجد: } \alpha = -33; \quad \beta = 30$$

$$\text{ومنه: } y(x) = -33e^{7x} + 30e^{8x}$$

المعرفة $\mathbb{R}$ على بما يلي: $x \mapsto e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$

حيث α و β عدنان حقيقيان.

مثال 1:

$$(1) \text{ حل المعادلة التفاضلية: } y'' - 7y' + 12y = 0$$

$$(2) \text{ حدد الدالة } f \text{ حل المعادلة (E) التي تحقق } f(0) = 0 \text{ و}$$

$$f'(0) = 1.$$

أجوبة (1): المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

لدينا: $\Delta = 1$, إذن المعادلة المميزة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما:

$$r_1 = 3 \quad \text{و} \quad r_2 = 4$$

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$

بما يلي: $x \mapsto \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

$$(2) f(x) = \alpha e^{4x} + \beta e^{3x}$$

نحسب: $f'(x)$

$$f'(x) = (\alpha e^{4x} + \beta e^{3x})' = 4\alpha e^{4x} + 3\beta e^{3x}$$

$$\begin{cases} \beta = -\alpha \\ 4\alpha - 3\alpha = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad f(x) = e^{4x} - e^{3x}$$

مثال 2: (1) حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 2y' + y = 0$

$$(2) \text{ حدد الدالة } f \text{ حل المعادلة (E) التي تحقق } f(0) = 0 \text{ و}$$

$$f'(0) = 1.$$

أجوبة (1): المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

لدينا: $\Delta = 0$ إذن للمعادلة المميزة حل حقيقي مزدوج $r_0 = \frac{-b}{2a} = 1$

و بالتالي حلول المعادلة التفاضلية (E) هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$

بما يلي: $x \mapsto (\alpha x + \beta) e^{1x}$ حيث α و β عدنان حقيقيان.

$$(2) f(x) = (\alpha x + \beta) e^x$$

نحسب: $f'(x)$

$$f'(x) = ((\alpha x + \beta) e^x)' = ((\alpha x + \beta))' e^x + (\alpha x + \beta) (e^x)'$$

$$f'(x) = (\alpha x + \alpha + \beta) e^x$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } f(x) = x e^x \text{ يعني } f(x) = (1x + 0) e^x$$

مثال 3: (1) حل المعادلة التفاضلية: $y'' - 4y' + 13y = 0$

$$(2) \text{ حدد الدالة } f \text{ حل المعادلة (E) التي تحقق } f(0) = 0 \text{ و}$$

$$f'(0) = 1.$$

أجوبة (1): المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E) هي:

$$r^2 - 4r + 13 = 0$$

تمارين غير محلولة

تمرين 1: نعتبر المعادلة التفاضلية : $2y' + 4y + 6 = 0$ (E)

1. حل المعادلة التفاضلية (E)

2. حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق الشرط : $f'(0) = 2$

تمرين 2: نعتبر المعادلة التفاضلية : $\frac{1}{3}y' + 2y - 1 = 0$ (E)

1. حل المعادلة التفاضلية (E)

2. حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق الشرط : $f'(0) = -1$

تمرين 3: نعتبر المعادلة التفاضلية : $y'' - 5y' + 6y = 0$ (E)

1. حل المعادلة التفاضلية (E)

2. حدد الدالة f حل المعادلة التفاضلية (E) التي تحقق الشرطين $f'(0) = 1$ و $f(0) = 2$:

تمرين 4: حل المعادلة التفاضلية $y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0$ (E).

حدد الحل f للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرطين $f(0) = 1$ و $f'(0) = 0$.

تمرين 5: حل المعادلات التفاضلية التالية :

$$y'' + 4y' + 8y = 0 \quad (2) \quad y'' + 2y' + y = 0 \quad (1)$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad (4) \quad y'' - 4y' + 2y = 0 \quad (3)$$

$$y'' + 16y = 0 \quad (6) \quad y'' - 4y = 0 \quad (5)$$

تمرين 4: حل المعادلة التفاضلية $y'' + 14y' + 49y = 0$

بحيث : $y(0) = -3$; $y'(0) = 6$

الجواب : المعادلة المميزة : $r^2 + 14r + 49 = 0$

نجد : $r = -7$ إذن : $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{-7x}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$y'(x) = \alpha e^{-7x} - 7(\alpha x + \beta)e^{-7x}$$

$$\begin{cases} y(0) = -3 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \text{ ولدينا } \begin{cases} y(0) = \beta \\ y'(0) = \alpha - 7\beta \end{cases}$$

$$\text{إذن: } \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha - 7\beta = 6 \end{cases} \text{ نجد : } \alpha = -15 ; \beta = -3$$

$$\text{ومنه : } y(x) = (-15x - 3)e^{-7x}$$

تمرين 5: حل المعادلة التفاضلية $y'' + y' + \frac{5}{2}y = 0$ بحيث :

$$y(0) = -4 ; y'(0) = 6$$

الجواب : المعادلة المميزة : $r^2 + r + \frac{5}{2} = 0$

$$\text{نجد : } z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad ; \quad \bar{z} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left(\alpha \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right) + \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \left(-\alpha \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + \beta \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$

$$\begin{cases} y(0) = -4 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \text{ ولدينا } \begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases}$$

$$\text{إذن: } \begin{cases} \alpha = -4 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = 6 \end{cases} \text{ نجد : } \alpha = -4 ; \beta = \frac{8}{3}$$

$$\text{ومنه : } y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(-4 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + \frac{8}{3} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \right)$$