

المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.
يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u, z, f, \dots)
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة , و مجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة , كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

(أ) $y' = 0$ هي معادلة تفاضلية
الدالة y المعرفة على \mathbb{R} بـ $y(x) = 1$ حل خاص للمعادلة
مجموعة الدوال الثابتة على \mathbb{R} هي الحل العام للمعادلة $y' = 0$.
(ب) $y' = x^2 - 1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x) = x^2 - 1$)
حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x \rightarrow x^2 - 1$ على \mathbb{R} .
أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $x \rightarrow \frac{1}{3}x^3 - x + k$ حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II - حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ 1/ المعادلة التفاضلية $y' = ay$

* إذا كان $a = 0$ فإن $y' = 0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على \mathbb{R}
* إذا كان $a \neq 0$

نعلم أن $(e^{ax})' = ae^{ax}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ إذن $x \rightarrow e^{ax}$ حل خاص للمعادلة $y' + ay = 0$
ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y' + ay = 0$ نضع $y(x) = z(x)e^{ax}$
ومنه $y'(x) = z'(x)e^{ax} + az(x)e^{ax}$
أي $y'(x) = z'(x)e^{ax} + ay(x)$ و بالتالي $y'(x) - ay(x) = z'(x)e^{ax} = 0$
ومنه $z'(x) = 0$ و بالتالي $z(x) = \lambda$ $\forall x \in \mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي
إذن $y(x) = \lambda e^{ax}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي
نلاحظ أن الحالة $a = 0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y' = ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \lambda e^{ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة $x \rightarrow y_0 e^{a(x-x_0)}$
الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$
حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث $x \rightarrow \lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

$$-2 \text{ نحل المعادلة التفاضلية } y' = \frac{1}{3}y \quad ; \quad y(1) = 2$$

$$\text{حل المعادلة التفاضلية } y' = \frac{1}{3}y \quad ; \quad y(1) = 2 \text{ هي الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ حيث } x \rightarrow 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$$

2/ حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

إذا كان $a = 0$ فإن $y' = b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x) = bx + c$

$$\text{إذا كان } a \neq 0 \text{ فإن } y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a \left(y + \frac{b}{a} \right)$$

$$\text{نضع } z = y + \frac{b}{a} \text{ ومنه } z' = y'$$

$$y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az$$

$$\Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \text{ وبالتالي}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث $a \neq 0$
المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $x \rightarrow \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay + b$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة $x \rightarrow \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$
الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

$$\text{نحل المعادلة التفاضلية } y' = -3y + 2$$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث $x \rightarrow \lambda e^{-3x} + \frac{2}{3}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

1- المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة

الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

$$* \text{ - إذا كان } a = b = 0 \text{ فإن } y'' = 0$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة $y'' = 0$ هي مجموعة الدوال $x \rightarrow kx + k'$ بحيث $(k; k') \in \mathbb{R}^2$

$$* \text{ - إذا كان } b = 0 \text{ فإن } y'' + ay' = 0$$

$$\Leftrightarrow (y')' + ay' = 0 \text{ ومنه } y' \text{ حل للمعادلة } z' + az = 0$$

$$\text{و بالتالي } y'(x) = \lambda e^{-ax} \text{ بحيث } \lambda \text{ عدد حقيقي اعتباطي}$$

$$\text{اذن الحل العام للمعادلة } y'' + ay' = 0 \text{ هي الدوال الأصلية } x \rightarrow \lambda e^{-ax}$$

$$\text{أي الدوال } x \rightarrow \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu \quad (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$$

3 - حل المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$; $E : (a; b) \neq (0; 0)$

لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجال I

تكون f و g متناسبتين اذا و فقط اذا كان $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = kf(x)$

(b) ليكن y_1 و y_2 حلين للمعادلة E و ليكن $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ بين أن $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E

خاصية

اذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة $y'' + ay' + by = 0$: E و كان $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ فان $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E .

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$: E هو تأليفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة E .

ملاحظة لايجاد حل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$: E يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

(d)- **حل المعادلة التفاضلية** $y'' + ay' + by = 0$: E ; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

لنبحث عن حلول من نوع $y : x \rightarrow e^{rx}$; $r \in \mathbb{R}$

$$y \text{ حل للمعادلة } E \Leftrightarrow r^2 e^x + a r e^x + b e^x = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E

خاصية

المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$: E ; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

الحالة 1 اذا كان $a^2 - 4b > 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حلين مختلفين r_1 و r_2 .

الدالتان $x \rightarrow e^{r_1 x}$; $x \rightarrow e^{r_2 x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية E

نلاحظ أن $x \rightarrow e^{r_1 x}$; $x \rightarrow e^{r_2 x}$ غير متناسبين

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

الحالة 2 اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حل مزدوج r .

الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E . نبين أن $x \rightarrow x e^{rx}$ حل للمعادلة E .

الدالتان $x \rightarrow e^{rx}$ و $x \rightarrow x e^{rx}$ غير متناسبتين لأن $x \rightarrow x \frac{e^{rx}}{e^{rx}}$ غير ثابتة.

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

الحالة 3 اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$ ($q \neq 0$)

$$e^{r_1 x} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx) = e^{px} \cos qx + i e^{px} \sin qx$$

نبين أن الدالتين $x \rightarrow e^{px} \cos x$; $x \rightarrow e^{px} \sin x$ حلين للمعادلة E .

$$\left(p = -\frac{a}{2} ; q = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \right) \text{ لاحظ}$$

و بما أن الدالتين $x \rightarrow e^{px} \cos x$; $x \rightarrow e^{px} \sin x$ غير متناسبتين فان حلول المعادلة التفاضلية

E هي الدوال $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية E : $y'' + ay' + by = 0$; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2 + ar + b = 0$ المعادلة المميزة

*- اذا كان $a^2 - 4b > 0$ فان المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين r_1 ; r_2

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$ الشرطان $y'(x_0) = y'_0$; $y(x_0) = y_0$ يسميان الشرطين البدئيين . يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

$$\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k \left(\frac{\alpha}{k} \cos qx + \frac{\beta}{k} \sin qx \right) = k (\cos \varphi \cos qx + \sin \varphi \sin qx) = k \cos (qx - \varphi) \quad \text{لدينا}$$

$$\cos \varphi = \frac{\alpha}{k} ; \quad \sin \varphi = \frac{\beta}{k} ; \quad k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{بوضع}$$

تستنتج اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان $x \rightarrow ke^{px} \cos (qx - \varphi)$ حيث k و φ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1$; $y_1'(0) = -1$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \quad \text{2- حل المعادلة}$$

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{3- حل المعادلة}$$

الجواب

$$1- \text{ليكن } \Delta \text{ مميز } r^2 + 2r - \frac{5}{4} = 0 \quad \text{المعادلة المميزة للمعادلة } y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$$

$$\Delta = 4 + 5 = 9 \quad \text{ومنه } r_1 = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{و } r_2 = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$$

ومنه حلول المعادلة هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

لنحدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1$; $y_1'(0) = -1$

$$\text{لدينا } y_1(x) = \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x} \quad \text{ومنه } y_1'(x) = \frac{\alpha}{2} e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5\beta}{2} e^{-\frac{5}{2}x}$$

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{5\beta}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 5\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{اذن } y_1(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x} \right)$$

$$2- \text{مميز } r^2 + 4r + 4 = 0 \quad \text{المعادلة المميزة للمعادلة } y'' + 4y' + 4y = 0 \quad \text{منعدم ومنه } r = -2$$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{-2x}$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

$$3- \text{مميز } r^2 + 2r + 5 = 0 \quad \text{المعادلة المميزة للمعادلة } y'' + 2y' + 5y = 0 \quad \text{هو } \Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$$

$$\text{ومنه } r_1 = -1 - 2i \quad \text{و } r_2 = -1 + 2i$$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow e^{-x} (\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x)$ حيث α و β عدنان اعتباطيان

حالات خاصة

*- اذا كان $a > 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي

$$x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{a}x + \beta \sin \sqrt{a}x \quad \text{حيث } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

*- اذا كان $a < 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي

$$x \rightarrow \alpha e^{\sqrt{-a}x} + \beta e^{-\sqrt{-a}x} \quad \text{حيث } (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$$

مثال حل المعادلتين $y'' - 4y = 0$; $y'' + 2y = 0$

حلل المعادلة $y'' + 2y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.

حلل المعادلة $y'' - 4y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$.