

المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.

يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل f, z, u, \dots) . حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة ، و مجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة ، كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلاً خاصاً للمعادلة ، كل حل يسمى كذلك تكاماً.

II- أمثلة

(أ) $y' = 0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على \mathbb{R} بـ $y = 1$ حل خاص للمعادلة
مجموعة الدوال الثابتة على \mathbb{R} هي الحل العام للمعادلة $y' = 0$.

(ب) $y' = x^2 - 1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y' = x^2 - 1$)
حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x^2 - 1 \rightarrow x$ على \mathbb{R} .

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $x \rightarrow \frac{1}{3}x^2 - x + k$
حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

III- حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

1/ المعادلة التفاضلية $y' = ay$

* إذا كان $a = 0$ فإن $y' = 0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على \mathbb{R}
* إذا كان $a \neq 0$

نعلم أن $y' + ay = 0$ ادن e^{ax} حل خاص للمعادلة $\forall x \in \mathbb{R}$ $(e^{ax})'$ $= ae^{ax}$

ليكن y حلاً اعتباطياً للمعادلة $y' + ay = 0$ نضع $y = z(x)e^{ax}$
ومنه $y' = z'(x)e^{ax} + az(x)e^{ax}$

أي $y' - ay = z'(x)e^{ax} + ay = z'(x)e^{ax} = 0$ و بالتالي $\forall x \in \mathbb{R}$ $z(x) = \lambda$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y = \lambda e^{ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي
نلاحظ أن الحالة $\lambda = 0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y' = ay$ تقبل ما لازهاره من الحلول وهي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $y \rightarrow \lambda e^{ax}$
حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay$ يتحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = 2y$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ $y \rightarrow \lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

$$y(1) = 2 \quad ; \quad y' = \frac{1}{3}y \quad 2 - \text{نحل المعادلة التفاضلية}$$

$x \rightarrow 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$ حل المعادلة التفاضلية $y(1) = 2$ هي الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث

2/ حل المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

اذا كان $a = 0$ فـ $y' = b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a\left(y + \frac{b}{a}\right) \quad \text{اذا كان } a \neq 0 \text{ فـ}$$

$$z' = y' \quad \text{و منه } z = y + \frac{b}{a} \quad \text{نضع}$$

$$y' = ay + b \Leftrightarrow z' = az$$

$$\Leftrightarrow z(x) = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax} \quad / \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{وبالتالي}$$

$$\Leftrightarrow y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \quad / \lambda \in \mathbb{R}$$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقين حيث $a \neq 0$

$x \rightarrow \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ بـ $y' = ay + b$ تقبل ما لانهاية من الحلول وهي الدوال المعرفة على \mathbb{R}

حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y' = ay + b$ يحقق الشرط $y(x_0) = y_0$ و هي الدالة

الشرط $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

نحل المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$

حلول المعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2 \rightarrow \lambda e^{-3x} + \frac{2}{3}$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بـ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$

1- المعادلات التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة

الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

- اذا كان $a = b = 0$ فـ $y'' = 0$ *

$$y'' = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \quad y'(x) = k \Leftrightarrow \exists (k; k') \in \mathbb{R}^2 \quad y(x) = kx + k'$$

الحل العام للمعادلة $y'' = 0$ هي مجموعة الدوال $x \rightarrow kx + k'$ حيث $k \in \mathbb{R}^2$

- اذا كان $b = 0$ فـ $y'' + ay' = 0$ *

$$y'' + ay' = 0 \Leftrightarrow (y')' + ay' = 0$$

و بالتالي $y'(x) = \lambda e^{-ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y'' + ay' = 0$ هي الدوال الأصلية

$$(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad x \rightarrow \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + \mu \quad \text{أي الدوال}$$

$$(a; b) \neq (0; 0) \quad ; \quad E : y'' + ay' + by = 0 \quad 3 - \text{ حل المعادلة التفاضلية}$$

تكون f و g متناسبتين ادا و فقط ادا كان $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = kf(x)$

(b) ليكن y_1 و y_2 حللين للمعادلة E و ليكن $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ بين أن $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E

خاصية

اذا كان y_1 و y_2 حللين للمعادلة E : $y'' + ay' + by = 0$ فان $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و كان E حل للمعادلة E .

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية E : $y'' + ay' + by = 0$ هو تالية خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة E .

ملاحظة لا يجاد حل العام للمعادلة التفاضلية E : $y'' + ay' + by = 0$ يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

(d) **حل المعادلة التفاضلية**

لنبحث عن حلول من نوع $r \in \mathbb{R}$; $y : x \rightarrow e^{rx}$

y حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0 \Leftrightarrow r^2 e^x + a r e^x + b e^x = 0 \Leftrightarrow E$

اذن اذا كان r حل للمعادلة E : $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E

خاصية

المعادلة $(a; b) \in \mathbb{R}^2$; $E : y'' + ay' + by = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $r^2 + ar + b = 0$

مميز هذه المعادلة هو $a^2 - 4b$

الحالة 1 اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حللين مختلفين r_1 و r_2 .

الدالتان $x \rightarrow e^{r_1 x}$; $x \rightarrow e^{r_2 x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية E

نلاحظ أن $x \rightarrow e^{r_1 x}$; $x \rightarrow e^{r_2 x}$ غير متناسبين

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدادن اعتباطيان.

الحالة 2 اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل حل مزدوج r .

الدالة $x \rightarrow e^{rx}$ حل للمعادلة E . نبين أن $x \rightarrow x e^{rx}$ حل للمعادلة E .

الدالتان $x \rightarrow e^{rx}$ و $x \rightarrow x e^{rx}$ غير متناسبين لأن $x \rightarrow \frac{e^{rx}}{e^{rx}}$ غير ثابتة.

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$ حيث α و β عدادن اعتباطيان

الحالة 3 اذا كان $a^2 - 4b > 0$ فان $r^2 + ar + b = 0$ تقبل جذرين متراافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$

$$e^{r_1 x} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx) = e^{px} \cos qx + i e^{px} \sin qx$$

نبين أن الدالتين $x \rightarrow e^{px} \cos qx$; $x \rightarrow e^{px} \sin qx$ حللين للمعادلة E .

$$\left(p = -\frac{a}{2} ; q = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \right) \text{ لاحظ}$$

و بما أن الدالتين $x \rightarrow e^{px} \cos qx$; $x \rightarrow e^{px} \sin qx$ غير متناسبين فان حلول المعادلة التفاضلية

هي الدوال $x \rightarrow e^{px} (\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$ حيث α و β عدادن اعتباطيان.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية E : $y'' + ay' + by = 0$ و لتكن $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ المعادلة المميزة

*- اذا كان $a^2 - 4b < 0$ فان المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين r_2 ; r_1

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عدادن اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b = 0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x) e^{rx}$ حيث α و β عدادن اعتباطيان

*- اذا كان $a^2 - 4b > 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين متراافقين $r_2 = p - iq$ و $r_1 = p + iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال حيث $x \rightarrow e^{px}$ حيث α و β عدادن اعتباطيان.

الحل الذي يحقق

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يتحقق الشرطين $y'(x_0) = y'_0$ و $y(x_0) = y_0$ يسمى الشرطان $y'(x_0) = y'_0$ و $y(x_0) = y_0$ يسميان الشرطين البدئيين . يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

$\alpha \cos qx + \beta \sin qx = k \left(\frac{\alpha}{k} \cos qx + \frac{\beta}{k} \sin qx \right) = k(\cos \varphi \cos qx + \sin \varphi \sin qx) = k \cos(qx - \varphi)$ لدينا $\cos \varphi = \frac{\alpha}{k}$; $\sin \varphi = \frac{\beta}{k}$; $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ بوضع تستنتج اذا كان $a^2 - 4b < 0$ حيث k و φ فان $x \rightarrow ke^{px} \cos(qx - \varphi)$ اعتباطيان

تمرين 1 - حل المعادلة $y'' + 2y' - \frac{5}{4}y = 0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1$ $y_1'(0) = -1$

- حل المعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$

- حل المعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$

الجواب

- ليكن Δ مميز $r^2 + 2r - \frac{5}{4} = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة

$$r_2 = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2} \text{ و } r_1 = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \text{ ومنه } \Delta = 4 + 5 = 9$$

ومنه حلول المعادلة هي الدوال $x \rightarrow \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$ حيث α و β عدادن اعتباطيان لتحديد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0) = 1$ و $y_1'(0) = -1$

لدينا $y_1'(x) = \frac{\alpha}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{5\beta}{2}e^{-\frac{5}{2}x}$ و منه $y_1(x) = \alpha e^{\frac{1}{2}x} + \beta e^{-\frac{5}{2}x}$

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{5\beta}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - 5\beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_1(x) = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{5}{2}x} \right) \text{ اذن}$$

- مميز $r^2 + 4r + 4 = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 4y' + 4y = 0$ منعدم ومنه

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow (\alpha + \beta x)e^{-2x}$ حيث α و β عدادن اعتباطيان

- مميز $r^2 + 2r + 5 = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y'' + 2y' + 5y = 0$ هو

$$r_2 = -1 + 2i \text{ و } r_1 = -1 - 2i \text{ ومنه}$$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \rightarrow e^{-x} (\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x)$ حيث α و β عدادن اعتباطيان

حالات خاصة

*- اذا كان $0 > a$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ حيث $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{ax} + \beta \sin \sqrt{ax}$.

*- اذا كان $0 < a$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y'' + ay = 0$ هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} بما يلي $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ حيث $x \rightarrow \alpha e^{\sqrt{-a}x} + \beta e^{-\sqrt{-a}x}$.

مثال حل المعادلتين $y'' - 4y = 0$; $y'' + 2y = 0$ حلول المعادلة $y'' - 4y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \sin \sqrt{2}x$ حيثحلول المعادلة $y'' + 2y = 0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \rightarrow \alpha e^{2x} + \beta e^{-2x}$ حيث