I. المعادلة التفاضلية: $y'=ay+b$

01. تذكير:

- f دالة عددية نرمز لها ب : y.
- f ' الدالة المشتقة ل f نرمز ل f ' ب : y'.
- الكتابة $f'(x)=af(x)+b$ نكتبها على الشكل الآتي $y'=ay+b$ و تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة .
- كل دالة عددية g قابلة للاشتقاق و تحقق المعادلة السابقة (أي $g'(x)=ag(x)+b$) تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'=ay+b$

02. حل المعادلة: $y'=ay+b$

المعادلة التفاضلية على شكل	حلول المعادلة هي الدوال $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي هي على شكل	مثال	الحلول هي
$y'=b;b\neq 0$	$f(x)=bx+c$ (مع $c\in\mathbb{R}$)	$y'=7$	$f(x)=7x+c$ مع $c\in\mathbb{R}$
حالة خاصة $y'=0$	$f(x)=c$ (مع $c\in\mathbb{R}$)	$y'=0$	$f(x)=c$ مع $c\in\mathbb{R}$
$y'=ay;a\neq 0$	$f(x)=c\times e^{ax}$ (مع $c\in\mathbb{R}$)	$y'=2y$	$f(x)=c\times e^{2x}$ مع $c\in\mathbb{R}$
$y'=ay+b$ و a و b من $\mathbb{R}^*$	$f(x)=c\times e^{ax}-\frac{b}{a}$ (مع $c\in\mathbb{R}$)	$y'=4y+5$	$f(x)=c\times e^{4x}-\frac{5}{4}$ مع $c\in\mathbb{R}$

03. برهان ل : $y'=ay+b=b$; a=0

$y'=b;b\neq 0$) الدالة المشتقة ثابتة إذن : $y=f(x)=bx+c$ مع $c\in\mathbb{R}$.

04. برهان ل $a\neq 0$; $y'=ay$ (1) :

نعتبر دالة f حل للمعادلة التفاضلية (1) حيث f معرفة على مجال I . ومنه : $\forall x\in I : f'(x)=af(x)$.

حالة : $\forall x\in I , f(x)=0$. الدالة المنعدمة هي حل لهذه المعادلة التفاضلية (1) مع $c=0$.

حالة : $\forall x\in I , f(x)\neq 0$

إذن : $\frac{f'(x)}{f(x)}=a$ و بالتالي : $\ln|f(x)|=ax+c'$ مع c' من $\mathbb{R}$. (درس الدوال الأصلية) .

ومنه : $|f(x)|=e^{ax+c'}=e^{ax}\times e^{c'}=\lambda e^{ax}$ مع $\lambda=e^{c'}>0$ من $\mathbb{R}$.

ومنه : $f(x)=\lambda e^{ax}>0$ أو $f(x)=-\lambda e^{ax}<0$ $\forall x\in I ,$ مع $\lambda=e^{c'}>0$ من $\mathbb{R}$.

إذن : يوجد x_1 و x_2 من I حيث : $f(x_1)=\lambda e^{ax_1}>0$ و $f(x_2)=-\lambda e^{ax_2}<0$ ؛ حسب مبرهنة القيم الوسطية T.V.I نستنتج أن : يوجد c_0 من I حيث $f(c_0)=0$. هذا غير ممكن لأن $\forall x\in I , f(x)\neq 0$)

إذن : $\forall x\in I , f(x)=\lambda e^{ax}$ أو $\forall x\in I , f(x)=-\lambda e^{ax}$

باختصار : $\forall x\in I , f(x)=-ce^{ax}$ مع $c\in\mathbb{R}$.

05. برهان ل $y'=ay+b\ ;\ a\neq 0$ (2) :

لدينا :

$$y'=ay+b \Leftrightarrow y'=a\left(y+\frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow y'=az\ ,\ z=y+\frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow z'=az\ ,\ z=y+\frac{b}{a}\ ,z'=\left(y+\frac{b}{a}\right)'=y'$$

حسب البرهان السابق نحصل على : حلول المعادلة التفاضلية : $z'=az$ هي الدوال التي على شكل : $z=ce^{ax}$ مع c من $\mathbb{R}$.

إذن : $z=ce^{ax} \Leftrightarrow z=y+\frac{b}{a}=ce^{ax} \Leftrightarrow y=ce^{ax}-\frac{b}{a}$

خلاصة الحل العام ل $y'=ay+b$ و a و b من $\mathbb{R}^*$: هي الدوال التي على شكل $f(x)=c\times e^{ax}-\frac{b}{a}$ (مع $c\in\mathbb{R}$)

06. خاصية :

المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ مع $a\neq 0$ تقبل حلا وحيدا f يحقق الشرط البدئي $f(x_0)=y_0$ مع x_0 و y_0 من $\mathbb{R}$

II. المعادلة التفاضلية: $y''+ay'+by=0$

01. تعاريف:

a و b من $\mathbb{R}$.

- المعادلة $(E): y''+ay'+by=0$ حيث المجهول هو دالة y مع y' مشتقتها الأولى مع y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة .
- كل دالة عددية f قابلة للاشتقاق مرتين و تحقق المعادلة التفاضلية (E) تسمى حل خاص للمعادلة التفاضلية (E)
- المعادلة $r^2+ar+b=0$ حيث r هو المجهول تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $(E): y''+ay'+by=0$.

02. حل المعادلة التفاضلية: $y''+ay'+by=0$

مبرهنة مقبولة :

لتكن المعادلة التفاضلية: $(E): y''+ay'+by=0$ و معادلتها المميزة $r^2+ar+b=0$ حيث: a و b من $\mathbb{R}$

و $\Delta=a^2-4b$ المميز للمعادلة المميزة

❖ $\Delta=a^2-4b>0$ إذن المعادلة المميزة $r^2+ar+b=0$ لها حلين حقيقيين r_1 و r_2 فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي : الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $y=f(x)=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

❖ $\Delta=a^2-4b=0$ إذن المعادلة المميزة $r^2+ar+b=0$ لها حل حقيقي مزدوج r_1 فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي : الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $y=f(x)=(\alpha x+\beta)e^{r_1x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

❖ $\Delta=a^2-4b<0$ إذن المعادلة المميزة $r^2+ar+b=0$ لها حلين عقديين مترافقين $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$ فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي : الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $y=f(x)=(\alpha\cos(qx)+\beta\sin(qx))e^{px}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

03. ملحوظة:

المعادلة التفاضلية: $y''+\omega^2 y=0$ حلولها هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $y=f(x)=\alpha\cos(\omega x)+\beta\sin(\omega x)$; $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

04. أمثلة :

مثال 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E):\ y''-5y'+6y=0$.

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .
2. أعط حلول المعادلة المميزة .
3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) :
   هي : $(C):\ r^2-5r+6=0$.
2. حلول المعادلة هي :
   $\Delta=1$, $r_1=2$, $r_2=3$.
3. نستنتج حلول المعادلة :
   الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل : $y=f(x)=\alpha e^{2x}+\beta e^{3x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

مثال 2 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E):\ y''+y'+y=0$.

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .
2. أعط حلول المعادلة المميزة .
3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) : هي : $(C):\ r^2+r+1=0$.
2. حلول المعادلة هي :
   $\Delta=-3$, $r_1=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$, $r_2=\overline{r_1}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\bar{j}$.
3. نستنتج حلول المعادلة :
   الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل : $f(x)=\left(\alpha\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{\frac{-1}{2}x}$ مع α و β من $\mathbb{R}$.

05. تمرين :

1) حل المعادلة التفاضلية: $(E): y'+2y=0$
2) بين أن : $y_0=e^{-3x}$ حل للمعادلة التفاضلية $(E'): y'+2y=-e^{-3x}$
3) حدد الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E') التي تحقق $g(0)=2$