

درس الأعداد العقدية الجزء 2:

للمعادلة حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z = -\frac{b}{2a} = 1$ إذن: $S = \{1\}$

نتيجة: ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$)
في المجموعة $\mathbb{C}$, لدينا: $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

لكل z من $\mathbb{C}$ $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ و $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

II. الترميز الأسّي لعدد عقدي غير منعدم

تعريف: كل عدد عقدي z غير منعدم, معياره r و θ عمدة له يكتب على الشكل $re^{i\theta}$ هذه الكتابة تسمى ترميزا أسيا للعدد العقدي z

مثال: ليكن: $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, لدينا: $|z| = 2$ و $\arg z \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

إذن $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هي ترميز أسّي للعدد العقدي z

خصائص: ليكن r و r' عددين حقيقيين موجبين قطعاً و θ و θ' عددين حقيقيين:

$$(1) \quad re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')} \quad (2) \quad re^{i\theta} = re^{i(\theta+2\pi)} \quad (3) \quad re^{i\theta} = re^{-i\theta} \quad (4) \quad \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

III. صيغتا أولير: ليكن θ عددا حقيقيا, لدينا:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{و} \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{و} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
 وهي صيغتا أولير

ولكل n من $\mathbb{N}$ و θ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$e^{in\theta} - e^{-in\theta} = 2i\sin(n\theta) \quad \text{و} \quad e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta)$$

مثال: بين أن: $\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

أو سؤال بطريقة أخرى: قم باخطا:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{لدينا:} \quad \theta \in \mathbb{R} \quad \text{ليكن}$$

$$\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \quad \text{اذن}$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8} \left((e^{i\theta})^3 + 3(e^{i\theta})^2 \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot (e^{-i\theta})^2 + (e^{-i\theta})^3 \right)$$

$$\cos^3\theta = \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i2\theta} \cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta} \cdot e^{-i2\theta} + e^{-i3\theta})$$

$$= \frac{1}{8} (2\cos 3\theta + 3 \times 2\cos\theta) = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

IV. صيغة موافر

ليكن θ عددا حقيقيا و n عنصرا من $\mathbb{N}$, لدينا:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

هذه المتساوية تسمى صيغة موافر, و تكتب أيضا: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

I. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$

(1) ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم حلا المعادلة: $z^2 = a$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هما:

$$\sqrt{a} \quad \text{و} \quad -\sqrt{a} \quad \text{إذا كان} \quad a > 0$$

$$i\sqrt{-a} \quad \text{و} \quad -i\sqrt{-a} \quad \text{إذا كان} \quad a < 0$$

مثال 1: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 = 5$

$$z^2 = 5 \quad \text{يعني} \quad z = \sqrt{5} \quad \text{و} \quad z = -\sqrt{5}$$

$$\text{ومنه:} \quad S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

مثال 2: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 = -3$

$$z^2 = -3 \quad \text{يعني} \quad z^2 = (\sqrt{3}i)^2 \quad \text{و} \quad z = \sqrt{3}i \quad \text{و} \quad z = -\sqrt{3}i$$

$$\text{ومنه:} \quad S = \{-\sqrt{3}i; \sqrt{3}i\}$$

(2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{حيث} \quad a, b, c \text{ أعداد حقيقية و } a \text{ غير منعدم}$$

نحسب العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ مميز المعادلة

$$az^2 + bz + c = 0$$

■ إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما:

$$z' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

■ إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z = -\frac{b}{2a}$

■ إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين

$$\text{هما:} \quad z' = \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z = \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال 1: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - z + 2 = 0$ (E)

مميز المعادلة (E) هو: .

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2) = -7 = (i\sqrt{7})^2$$

$$\text{حلا المعادلة } (E) \text{ هما:} \quad z_1 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{و}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \right\} \quad \text{إذن:} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

مثال 2: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - z - 2 = 0$ (E)

مميز المعادلة (E) هو:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) = 9 = (3)^2$$

$$\text{حلا المعادلة } (E) \text{ هما:} \quad z_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$\text{إذن:} \quad S = \{-1; 2\}$$

مثال 3: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 2z + 1 = 0$ (E)

الجواب: مميز المعادلة (E) هو: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$