

الأعداد العقدية

د. محمد الكيال

مجموعة الأعداد العقدية هي : $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ و } i^2 = -1\}$

← الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ويرمز له بالرمز : $\text{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ويرمز له بالرمز : $\text{Im}(z)$

حالتان خاصتان:

- إذا كان : $\text{Im}(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي
- إذا كان : $\text{Re}(z) = 0$ و $\text{Im}(z) \neq 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

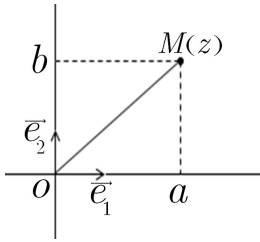
← تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ و } \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$

← التمثيل المبراني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوباً إلى معلم متعامد منظم $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

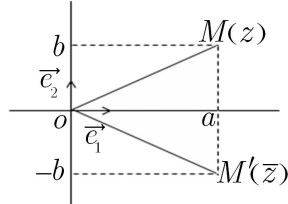


ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a, b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M والنقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب : $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\vec{OM}$ و نكتب : $\vec{OM}(z)$ أو $z = \text{Aff}(\vec{OM})$

← مرافق عدد عقدي:



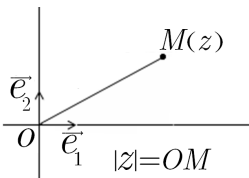
ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي : $\bar{z} = a - ib$

$M(z)$ و $M'(\bar{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

• $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي • $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z$ عدد تخيلي صرف • $z + \bar{z} = 2 \text{Re}(z)$ • $z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$ • $z\bar{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$	• $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ • $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ • $\overline{z^n} = \bar{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ • $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$
---	--

← معيار عدد عقدي:

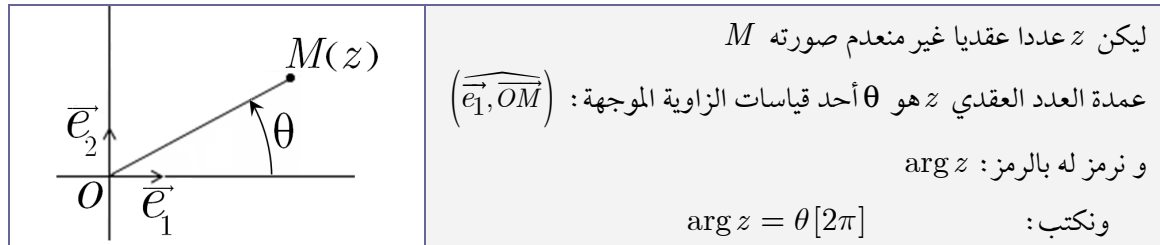


ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب : $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\begin{aligned} |z \times z'| &= |z| \times |z'| & |z^n| &= |z|^n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ |\bar{z}| &= |z| & |-z| &= |z| \\ \left| \frac{1}{z'} \right| &= \frac{1}{|z'|} & \left| \frac{z}{z'} \right| &= \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0) \end{aligned}$$

الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:



حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a < 0$	$a > 0$
$a = [-a, \pi]$	$a = [a, 0]$
$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2}\right]$

ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta [2\pi]$

• الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$$

• الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي: $z = re^{i\theta}$

$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$ $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ $\frac{1}{r'e^{i\theta'}} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$ $\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr'; \theta + \theta']$ $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$ $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$ $[r, \theta]^n = [r^n; n\theta]$ $\frac{1}{[r'; \theta']} = \left[\frac{1}{r'}; -\theta'\right]$ $\frac{[r; \theta]}{[r'; \theta']} = \left[\frac{r}{r'}; \theta - \theta'\right]$	$\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z') [2\pi]$ $\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi]$ $-\arg z \equiv (\pi + \arg z) [2\pi]$ $\arg z^n \equiv n \arg z [2\pi]$ $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z [2\pi]$ $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z') [2\pi]$
--	---	---

• $z \Leftrightarrow \arg z = k\pi$ عدد حقيقي

• $z \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ عدد تخيلي صرف ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$$

صيغة أولر:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \cos \theta &= \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta &= \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad \text{و} \end{aligned}$$

صيغة موافر:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \\ (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \end{aligned}$$

حل المعادلة $z^2 = a$ حيث $a \in \mathbb{R}$:

المعادلة:	مجموعة حلول المعادلة:
$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$
$a = 0$	$S = \{0\}$
$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

← حل المعادلة: $az^2 + bz + c = 0$ حيث $z \in \mathbb{C}$ و a و b و c أعداد حقيقية ($a \neq 0$)

المعادلة:	مجموعة حلول المعادلة:
$z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ ($\Delta = b^2 - 4ac$)	$\Delta > 0$ $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$ $S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$ $S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

← مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$AB = z_B - z_A $	المسافة AB
$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[A; B]$
$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$	قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right)$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$	A و B و C نقط مستقيمة
$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$ أو $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$	A و B و C و D نقط متداورة

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$ z - z_A = r$ ($r > 0$)	$AM = r$ M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r
$ z - z_A = z - z_B $	$AM = BM$ M تنتمي إلى واسط $[AB]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC مثلث قائم الزاوية في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC مثلث متساوي الساقين في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	ABC مثلث متساوي الأضلاع

← تمثيلان عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

التحويل	تمثيله العقدي هو:
الإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}$	$z' = z + b$ حيث b لحق المتجهة $\vec{u}$
التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k	$z' - \omega = k(z - \omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω
الدوران r الذي مركزه Ω و زاويته θ	$z' - \omega = e^{i\theta} (z - \omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω