الأعداد العقدية « تتمّة »

I- المعـادلات من الدرجـة الثانيـة فـي $\mathbb{C}$

1- الجذران المربعان لعدد حقيقي غير منعـدم :

a- تعريـف :

نقول أن العدد العقدي z جذرا مربعا للعدد الحقيقي Z إذا وفقط إذا كان : $z^2 = Z$.

b- تحديد الجدرين المربعين لعدد حقيقي غيـر منعـدم :

- حالـة 1 : $Z \in \mathbb{R}_+^*$

الجذران المربعان للعدد Z همـا $\sqrt{Z}$ و $-\sqrt{Z}$.

- حالـة 2 : $Z \in \mathbb{R}_-^*$

لدينا :
$$\begin{aligned} Z &= -(-Z) \\ &= i^2\,(-Z) \\ &= \left(\sqrt{-Z}\; i\right)^2 \end{aligned}$$

إذن : الجذران المربعان للعدد Z همـا $-\sqrt{-Z}\, i$ و $\sqrt{-Z}\, i$

مثـال :

$$\begin{aligned} Z &= -3 \\ &= 3\, i^2 \end{aligned}$$

إذن الجذران المربعان للعدد -3 همـا $\sqrt{3}\, i$ و $-\sqrt{3}\, i$.

خاصيــة :

لكل عدد حقيقي غير منعـدم جذران مربعـان مختلفـان ومتقابـلان .

2- المعادلــات من الدرجــة الثانيــة فــي $\mathbb{C}$

- **تعريــف :**

المعادلة التي تكتب على شـكل $a z^2 + b z + c = 0$
حيث : a ، b و c أعداد حقيقية و $a \neq 0$ و z عدد عقدي مجهول ،
تسمــى معادلــة من الدرجــة الثانيــة فــي $\mathbb{C}$.

- **حـل المعـادلات من الدرجـة الثـانيـة $\mathbb{C}$:**

لتكن a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

لدينا :
$$(E)\ :\ a z^2 + b z + c = 0 \iff z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0$$
$$\iff z^2 + 2\frac{b}{2a} z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$
$$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ab^2}{4a^2}$$
$$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

نضع : $\Delta = b^2 - 4ac$

وليكن δ أحد الجذرين المربعين للمميز Δ.

إذن :

$$(E) : \iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{\delta^2}{4a^2}$$

$$\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$$

$$\iff z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{-\delta}{2a}$$

$$\iff z = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{أو} \quad z = \frac{-b-\delta}{2a}$$

ومنه : حل المعادلة $(E) : az^2 + bz + c = 0$

هــو :

$$S = \left\{\frac{-b+\delta}{2a} \; ; \; \frac{-b-\delta}{2a}\right\}$$

خاصيــة :

حلي المعادلــة $az^2 + bz + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ همــا :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

تطبيقــات :

حــل فــي $\mathbb{C}$ المعـادلات التـاليـة :

(1 $z^2 + z + 1 = 0$

لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \\ &= 3i^2 \\ &= \left(\sqrt{3}\, i\right)^2\end{aligned}$$

إذن : $S = \sqrt{3}\, i$

ومنه حلي المعادلة همـا :

$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{3}\, i}{2} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}\, i}{2}$$

ومنه :

$$S = \left\{\frac{-1-\sqrt{3}\, i}{2} \; ; \; \frac{-1+\sqrt{3}\, i}{2}\right\}$$

(2 $z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$

حيث : $0 \prec \theta \prec \frac{\pi}{2}$

$$z^2 + 2z + \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$$

$$\Delta = 4 - \frac{4}{\cos^2\theta}$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= 4\left(\frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= 4\left(\frac{-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

$$= -4\tan^2\theta$$

$$= (2i\tan\theta)^2$$

إذن : $\delta = 2i\tan\theta$

ومنه : الحليـن همــا :

$$z_1 = \frac{2 - 2i\tan\theta}{2} = 1 - i\tan\theta$$

$$z_2 = \frac{+2 + 2i\tan\theta}{2} = +1 + i\tan\theta$$

إذن : $S = \{1 - i\tan\theta \; ; \; 1 + i\tan\theta\}$

طريقــة 2 :

لدينا : $z^2 - 2z + \frac{1}{\cos\theta} = 0$

أي : $z^2 - 2z + 1 + \tan^2\theta = 0$

إذن : $(z-1)^2 = -\tan^2\theta$

$$(z-1)^2 = (i\tan\theta)^2$$

إذن : $z - 1 = -i\tan\theta$ أو $z - 1 = i\tan\theta$

$z = 1 - i\tan\theta$ أو $z = 1 + i\tan\theta$

إذن : $S = \{1 - i\tan\theta \; ; \; 1 + i\tan\theta\}$

أكتب الحليــن علـى الشكـل المثلثـي.

لدينا : $z_1 = 1 - i\tan\theta$

$$= 1 - i\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos(-\theta) + i\ \sin(-\theta)\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\ ,\ -\theta\right] \qquad 0 \prec \cos\theta \text{ لأن}$$

ولدينا : $z_2 = 1 + i\ \tan\theta$

$$= \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\cos\theta}\ ,\ \theta\right]$$

ملاحظة :

إذا كانت : $\frac{\pi}{2} \prec \theta \prec \pi$

فإن : $\cos\ \theta \prec 0$

إذن : $z_1 = \frac{1}{\cos\theta}\left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}\ (-1)\ \left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}\ [1\ ,\ \pi]\ [1\ ,\ \theta]$$

$$= \frac{-1}{\cos\theta}\ [1\ ,\ \pi+\theta]$$

$$= \left[\frac{-1}{\cos\theta}\ ,\ \pi+\theta\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} R\cdot[r\ ,\ \theta] &= R\left(r\ \left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right)\right) \\ &= R\cdot r\ \left(\cos\theta + i\ \sin\theta\right) \\ &= [R\,r\ ,\ \theta] \end{aligned}}$$

II- صيغــة موافــر وصيغتــا أوليــر :

1. صيغــة Moivre

ليكن $u = [r\ ,\ \theta]$

نعلم أن $|u^n| = |u|^n = 1$

$$\arg\ u^n = n\ \theta\ [2\ \pi]$$

يعني أن : $\boxed{[1\ ,\ \theta]^m = [1\ ,\ m\ \theta]}$

$$\boxed{\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos\ n\ \theta + i\ \sin\ n\ \theta}$$

تسمى هذه المتساويـة بصيغة موافـر.

تطبيقـات صيغة موافر.

-1 أنشر : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$

لدينا : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta \cdot \sin\theta + 2\,i\,\cos\theta\,\sin\theta$

وبما أن : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\,\sin 2\,\theta$

فإن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \hline \sin 2\theta = 2\cos\theta\,\sin\theta \end{array}}$$

-2 أنشر : $(\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \cdot i\,\sin\theta - 3\cos\theta \cdot \sin^2\theta - i\,\sin^3\theta$$

$$= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin^3\theta\right)$$

وبما أن : $(\cos\theta + i\,\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + \sin\,3\theta$

إذن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta \\ \hline \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\,\sin\theta - \sin^3\theta \end{array}}$$

تعميـــم :

لدينا : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\,\theta + i\,\sin n\,\theta$

إذن :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos n\,\theta = \Re e\left((\cos\theta + i\,\sin\theta)^n\right) \\ \hline \sin n\,\theta = \mathrm{Im}\left((\cos\theta + i\,\sin\theta)^n\right) \end{array}}$$

2. صيغتـا أوليـر :

1-2 : الترميـز الأسـي لعـدد عقـدي غير منعـدم :

نرمز بالرمز $e^{i\,\theta}$ حيث $\theta \in \mathbb{R}$ للعدد العقدي الذي معياره 1 وعمدته θ.

أي :

$$\boxed{e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta = [1\,,\,\theta]}$$

أمثلـة :

-1 $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2} = i$

-2 $e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

ملاحظـة :

1- إذا كان : $z = [R\ ,\ \theta]$

فإن : $z = R \cdot e^{i\theta}$

2- إذا كان : $\arg z_1 \equiv \theta\ [2\pi]$; $\arg z_2 \equiv \alpha\ [2\pi]$

فإن : $\arg z_1 \times z_2 \equiv \theta + \alpha\ [2\pi]$; $\arg \dfrac{z_1}{z_2} \equiv \theta - \alpha$

$$\boxed{e^{i\theta} \cdot e^{i\alpha} = e^{i(\theta+\alpha)}} \quad ; \quad \boxed{\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}} = e^{i(\theta-\alpha)}}$$

3- $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$\arg z^n = n \arg z\ [2\pi]$$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

$$e^0 = 1$$

$$e^{i\pi} = -1$$

2-2 : صيغتـا أولـير :

لدينا :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

إذن :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

نسمي هاتين المتساويتين بصيغتـي أولـير.

ملاحظـة :

$$\boxed{\cos n\theta = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}}$$

$$\boxed{\sin n\theta = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}}$$

تطبيقـات صيغتـا أولـير :

الاخطـاط **La linéarisation**

مثـــال :

1- أخطـط $\cos^2\theta$

لدينا :
$$\cos\ \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^2\ \theta = \frac{\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^2}{4}$$

إذن :
$$= \frac{1}{4}\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(2\cos\ 2\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\ 2\theta$$

-2 أخطط $\sin^2\theta$

لدينا :
$$\sin\ \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\,i}$$

إذن :
$$\sin^2\ \theta = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{-4}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= -\frac{1}{2}\cos\ 2\theta + \frac{1}{2}$$

-3 أخطط $\cos^3\theta$

$$\cos\ \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\cos^3\ \theta = \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + 3\,e^{2i\theta}\cdot e^{-i\theta} + 3\,e^{i\theta}\cdot e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(2\cos\ 3\theta + 6\cos\theta\right)$$
$$= \frac{1}{4}\cos\ 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

إذن :
$$\boxed{\cos^3\theta = \frac{1}{4}\cos\ 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta}$$

تعريـــف :

الإخطاط هو كتابة $\cos^n x$ و $\sin^n x$ بدلالـة $\cos\ k\,x$ و $\sin\ k\,x$.

الإخطـاط باستعمـال صيغـة Moivre

نضع : $z = \cos\theta + i\ \sin\theta$

$$\overline{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$z\,\overline{z} = 1$$

$$2\cos\theta = z + \overline{z} \quad \text{و} \quad 2i\sin\theta = z - \overline{z}$$

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\overline{z}^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

$$z^n \cdot \overline{z}^n = 1$$

$$2\cos n\theta = z^n + \overline{z}^n \quad \text{و} \quad 2i\sin n\theta = z^n - \overline{z}^n$$

أخطط $\cos^3\theta$

لدينا :

$$2\cos\theta = z + \overline{z}$$

$$8\cos^3\theta = \left(z + \overline{z}\right)^3$$

$$= z^3 + 3z^2\overline{z} + 3z\overline{z}^2 + \overline{z}^3$$

$$= z^3 + \overline{z}^3 + 3\left(z + \overline{z}\right)$$

$$= 2\cos 3\theta + 3\times 2\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta$$

التمثيل العقدي للدوران

المستوى العقدي منسوب الى معلم م م م

نعتبر الدوران r الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ

لدينا $r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

اذن $\begin{cases} |z' - \omega| = |z - \omega| \\ \arg\dfrac{z' - \omega}{z - \omega} \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

ومنه $z' - \omega = e^{i\theta}\left(z - \omega\right)$

خاصية

التمثيل العقدي للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ

هو $z' - \omega = e^{i\theta}\left(z - \omega\right)$