

الأعداد العُقدية

1. تقديم و تعاريف :

- ❖ توجد مجموعة يرمز لها ب $\mathbb{C}$ و تسمى مجموعة الأعداد العقدية و تحقق $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ و هي تحتوي على عدد نرمز له ب i حيث $i^2 = -1$
- ❖ كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب على شكل $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- ❖ العدد a يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له ب $\Re(z)$
- ❖ العدد b يسمى الجزء التخيلي و نرمز له ب $\Im(z)$
- ❖ الكتابة $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z
- ❖ إذا كان $z = ib$ حيث $b \in \mathbb{R}$ نقول أن z تخيلي صرف و نكتب $z \in i\mathbb{R}$

2. خاصيات :

- ليكن $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ لدينا :
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0$
 - $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(z) = 0$
 - $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = \Re(z') \\ \Im(z) = \Im(z') \end{cases}$
 - $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = 0 \\ \Im(z) = 0 \end{cases}$

العمليات في $\mathbb{C}$

ليكن $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $-z = -a - ib$
- $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- جميع خصائص الجداء و الجمع في $\mathbb{R}$ تبقى صالحة في $\mathbb{C}$
- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
- $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
- $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$

3. مرافق عدد عقدي

تعريف :

مرافق العدد العقدي $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ هو العدد العقدي $\bar{z} = a - ib$

خاصيات المرافق

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ✓
- $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$ ✓
- $(z_1 \neq 0) \quad \frac{1}{\bar{z}_1} = \overline{\frac{1}{z_1}}$ ✓
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ✓
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ و $z \in \mathbb{C}$ ✓

نتائج :

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z) \\ z - \bar{z} &= 2i \operatorname{Im}(z) \\ z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z} \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = -\bar{z} \end{aligned}$$

4. معيار عدد عقدي :

معيار العدد العقدي $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ $|z|$ و هو معرف بما يلي :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

خاصيات :

ليكن z و z' عددين عقديين

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad \checkmark$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \quad \checkmark$$

$$(z \neq 0) \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \checkmark$$

$$(z' \neq 0) \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \checkmark$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad |z^n| = |z|^n \quad \checkmark$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \checkmark$$

5. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

أ. عمدة عدد عقدي غير منعدم :

ليكن $z = x + iy$ من $\mathbb{C}^*$ حيث x و y من $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{كل عدد حقيقي } \theta \text{ بحيث : } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases} \quad \text{يسمى عمدة لـ } z \text{ و نكتب : } \arg(z) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{أو } \arg(z) \equiv \theta [2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ب. خاصيات العمدة:

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

$$\arg(\overline{z_1}) \equiv -\arg(z_1)[2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z_1)[2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi] \quad \checkmark$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث} \quad \arg(z_1^n) \equiv n \arg(z_1)[2\pi] \quad \checkmark$$

6. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف :

كل عدد عقدي z غير منعدم يكتب على شكل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

خاصيات الشكل المثلثي :

- $\overline{r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
- $r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r'(\cos \theta' + i \sin \theta') = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$
- $\frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
- $\frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{r'(\cos \theta' + i \sin \theta')} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$
- $(r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ (علاقة موافر)

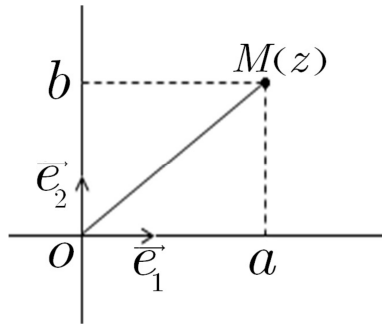
7. تأويلات هندسية للأعداد العقدية :

تعريف:

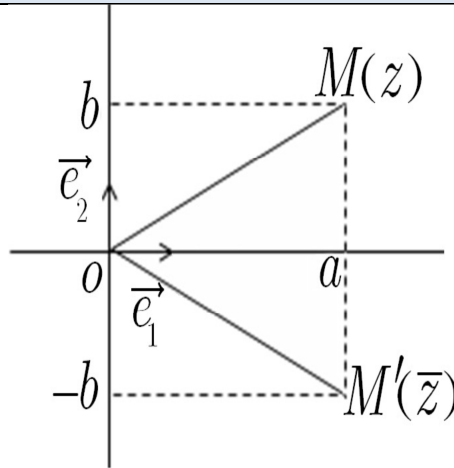
في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

لتكن النقطة $M(a, b)$

- العدد العقدي $z = a + ib$ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ يسمى لحق النقطة M
- النقطة $M(a, b)$ تسمى صورة العدد $z = a + ib$ حيث $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

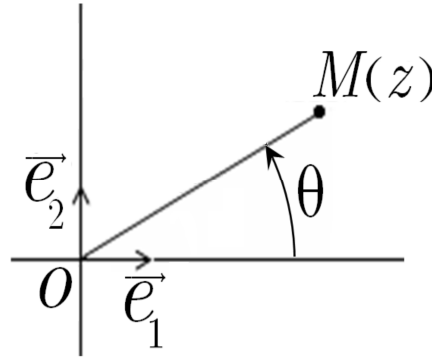


- مرافق $z = a + ib$ هو $\bar{z} = a - ib$

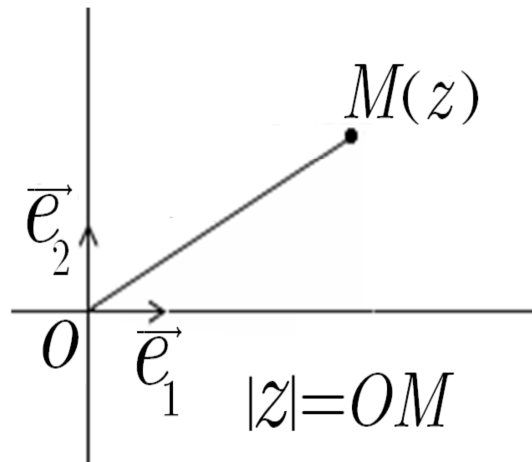


- لدينا كذلك $z = a + ib$ هو لحق المتجهة $\vec{U}(a, b)$
- المستوى (P) يسمى المستوى العقدي
- $(O, \vec{e}_1)$ يسمى المحور الحقيقي
- $(O, \vec{e}_2)$ يسمى المحور التخيلي
- $\vec{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ ونكتب $z_M = a + ib$ أو $\text{aff}(M) = a + ib$

❖ ليكن $z = a + ib$ لحق النقطة M من المستوى العقدي لدينا : $\arg(z) \equiv (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$



❖ المسافة OM : $OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$



المسافة AB :
لتكن A و B نقطتان لحقهما على التوالي z_A و z_B
لدينا : $AB = |z_B - z_A|$

خاصيات :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_A و z_B
و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان من المستوى العقدي (P) :

- لحق المتجهة $\overline{AB}$ هو : $z_B - z_A$
- لحق المتجهة $\vec{u} + \vec{v}$ هو : $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ هو : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- M نقطة لدينا :
- $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \Leftrightarrow z_M = z_A + z_B$
- $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} \Leftrightarrow z_M = \alpha \cdot z_A$

- لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقط مختلفة متتى متتى
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B, C$ مستقيمة
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \parallel (DC)$
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow$
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \perp (DC)$
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow$
- النقط A و B و C و D متداورة $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

قياس الزوايا :

لتكن $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$

- $O \neq A$ حيث $\arg(\overline{e_1}, \overline{OA}) \equiv \arg(z_A)[2\pi]$
- $A \neq B$ حيث $\arg(\overline{e_1}, \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$
- $A \neq C$ و $A \neq B$ حيث $\arg(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

$$\bullet \quad \left(\overline{AB}, \overline{DC} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$$

حيث $A \neq B$ و $C \neq D$

8. الشكل الأسّي لعدد عقدي :

تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم يكتب على شكله الأسّي ب: $z = re^{i\theta}$
حيث $|z| = r$ و $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

خاصيات :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \quad \checkmark \\ \overline{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} \quad \checkmark \\ \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} \quad \checkmark \\ e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} \quad \checkmark \\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta-\theta')} \quad \checkmark \\ (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} \quad \checkmark \end{aligned}$$

صيغ أولير

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

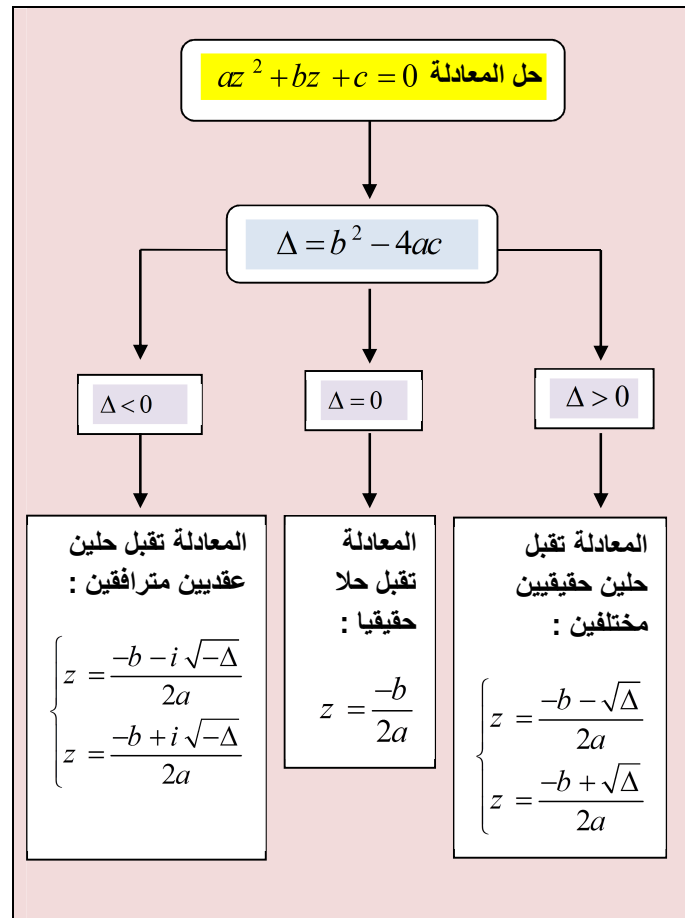
9. المعادلات في $\mathbb{C}$

أ. المعادلة $z^2 = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$)

إذا كان : $a \in \mathbb{R}_*^-$ لدينا : $z^2 = a \Leftrightarrow z = i\sqrt{-a} \vee z = -i\sqrt{-a}$

إذا كان : $a \in \mathbb{R}_*^+$ لدينا : $z^2 = a \Leftrightarrow z = \sqrt{a} \vee z = -\sqrt{a}$

ب. المعادلة $az^2 + bz + c = 0$: حيث a و b و c من $\mathbb{R}$ مع $a \neq 0$:



10. التحويلات الاعتيادية :

خاصية :

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$

❖ الكتابة العقدية للإزاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ هي : $z' = z + z_{\vec{u}}$

❖ الكتابة العقدية للتعاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و نسبته k هي : $z' - \omega = k(z - \omega)$

❖ الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ و زاويته θ هي : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$